Електрика та магнетизм

Лекція 12.
Перетворення Фур’є. RLC-кола. Потенціали та поля. Калібровочна інваріантність. Джерела та вихрі полів.

Определение ряда Фурье

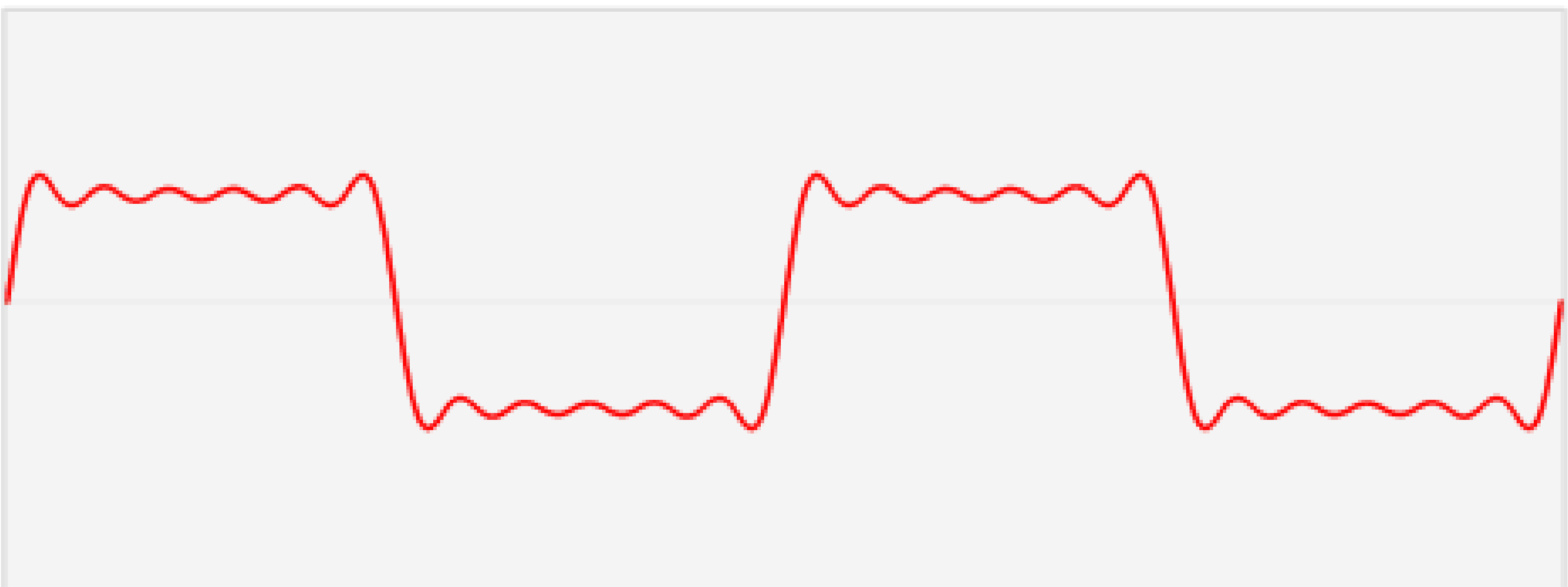
Тригонометрический ряд

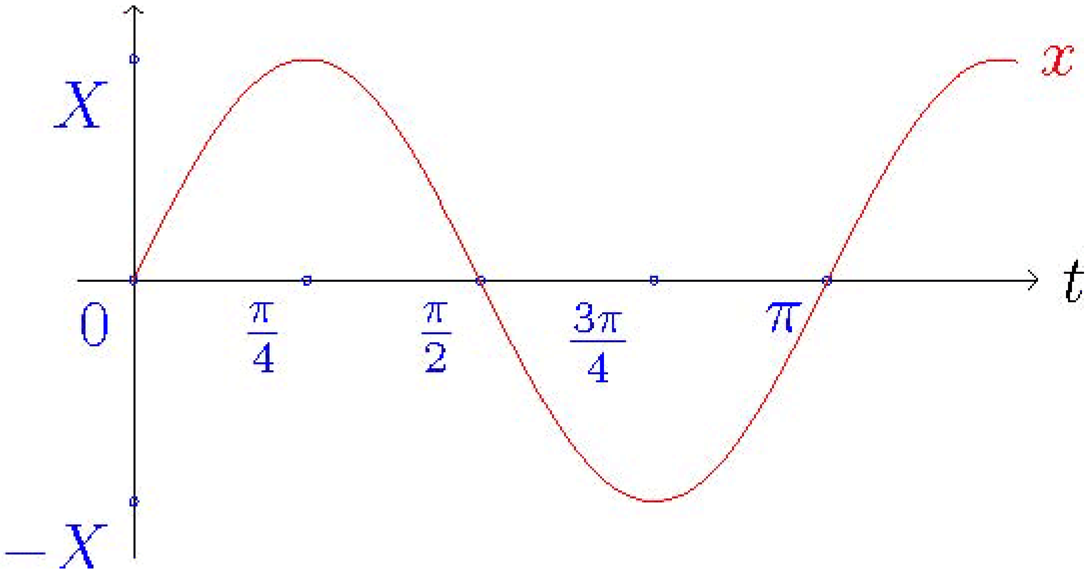
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad ,$$

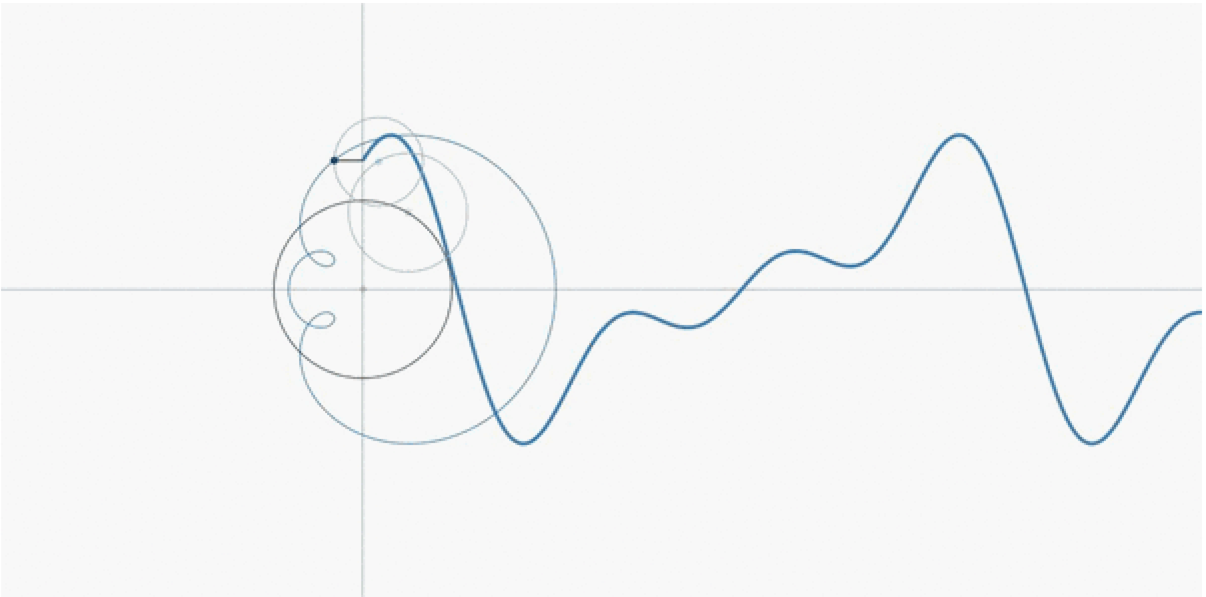
коэффициенты которого вычислены по формулам Фурье, т. е.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-}^{\pi} f(x)\cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

называется рядом Фурье периодической с периодом 2π функции.




X
−X
0
π/4
π/2
3π/4
π
x
t



Интеграл Фурье

- Если функция не является периодической, то подобные расчеты выполняются с помощью *интеграла Фурье* – предельного случая ряда Фурье.

- Интеграл Фурье в экспоненциальной форме:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Прямое преобразование Фурье:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- Обратное преобразование Фурье:

$$\varphi(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Функция $\boldsymbol{\varphi(i\omega)}$ – комплексный частотный спектр функции $\boldsymbol{\varphi(t)}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{ix\omega} dw$$

Представление непериодических функций времени в частотной области. Интеграл Фурье.

При определении спектра непериодической импульсной функции выполним предельный переход, воспользовавшись комплексной формой записи ряда Фурье для периодических функций (пределы интегрирования – *T/2 и +T/2)*:

$$u(t)_{nep} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} u(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt\right]e^{jn\omega_1 t}$$

Так как в линейчатом спектре ряда Фурье расстояние между спектральными линиями соответствует $\Delta f = \Delta\omega / 2\pi = f_1 = 1/T$

Можно также записать

$$u(t)_{nep} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left[\Delta\omega\int_{-T/2}^{+T/2} u(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt\right]e^{jn\omega_1 t}$$

Далее выполняется предельный переход при *T →∞ и Δω →0*

$$u(t)_{непер.} = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\omega\to 0}} u(t)_{nep} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{j\omega t}\,dt\right)}_{\dot X(\omega)} e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$I(t) \to \hat{I}(\omega)$$

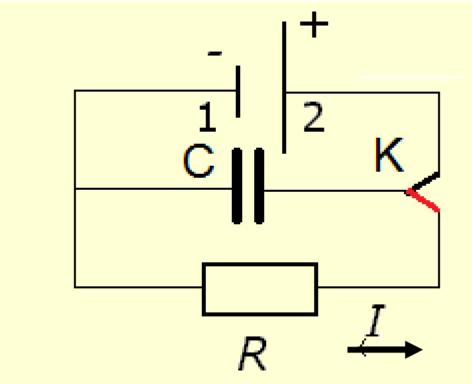
$$\hat{U}(\omega) = z(\omega)\hat{I}(\omega)$$

$$\hat{U}(\omega) \to U(t)$$

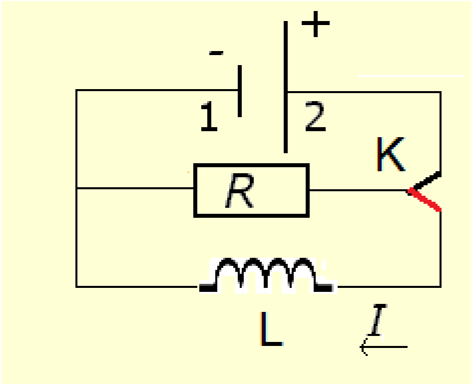
АЧХ, тембр, фільтри

RLC-кола.

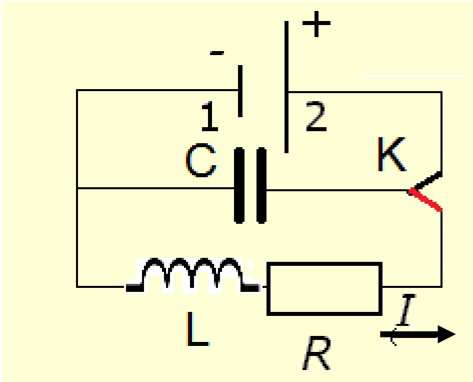
RC



RL



RLC



$$\frac{q}{C} + RI = 0, I = \frac{dq}{dt}$$

$$\dot{q} + \frac{q}{RC} = 0$$

$$RI + L\frac{dI}{dt} = 0,$$

$$\dot{I} + \frac{R}{L}I = 0,$$

$$\frac{q}{C} + RI + L\frac{dI}{dt} = 0, \; \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\dot{y} + \tau^{-1}y = 0 \Rightarrow y = y_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

Решение находят в виде суммы экспонент:

$q = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$,

где число слагаемых равно порядку диффе-ренциального уравнения. После подстановки в исходное уравнение можно получить характеристическое уравнение, из которого определяют корни p_1, p_2. Если встречаются кратные корни (например, $p_1 = p_2 = P$), решение имеет вид

$A_1 \cdot e^{Pt} + A_2 \cdot t \cdot e^{Pt}$.

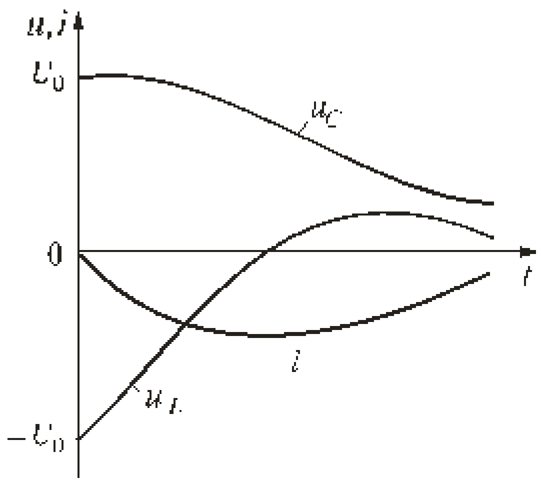
$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \Rightarrow p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2},\ \gamma = \frac{R}{2L},\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

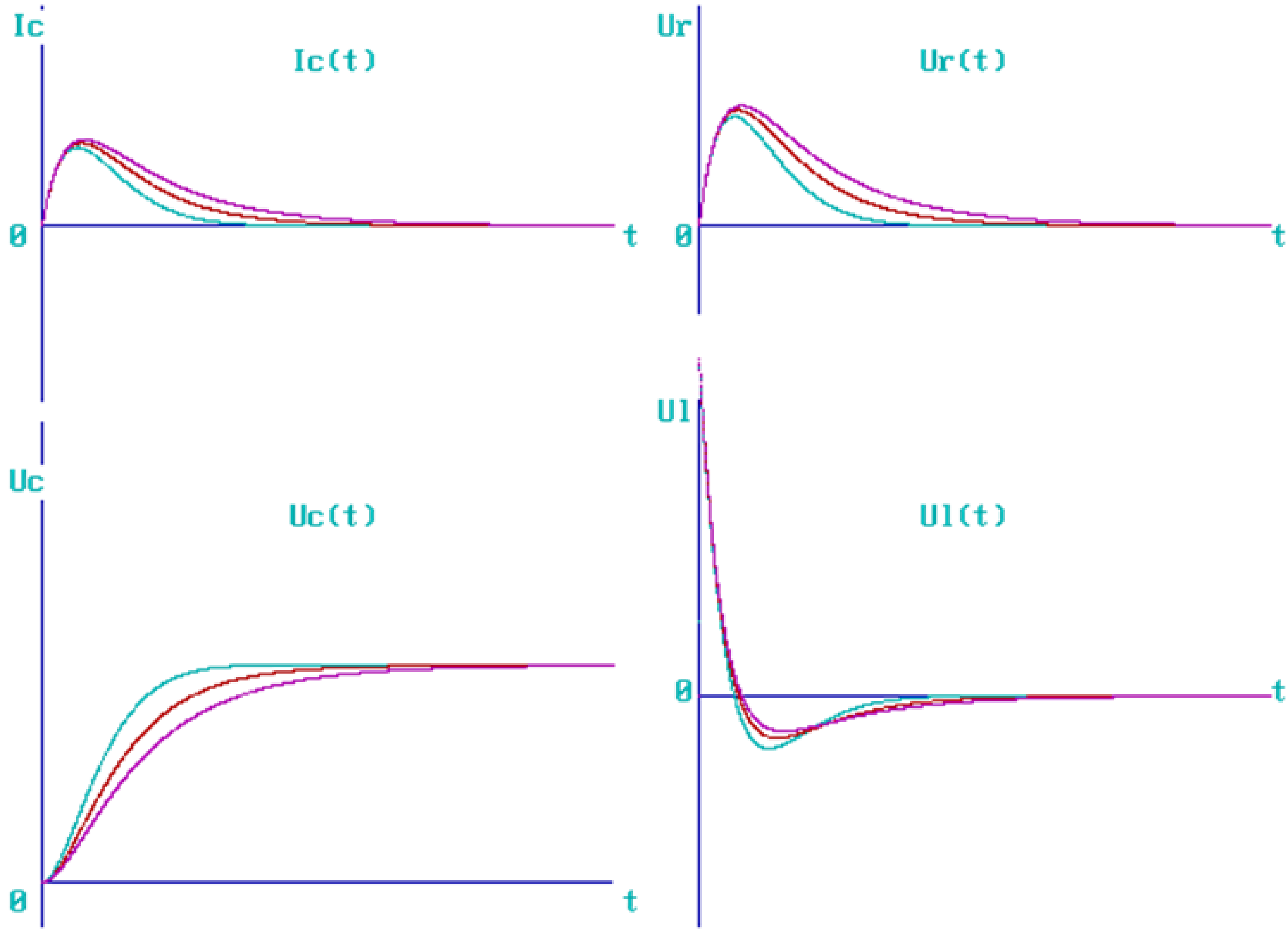
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

За цією резонансною або томсоновскою частотою z_L=-z_C, тому послідовно з'єднані конденсатор та котушка мають нульовий імпеданс, а паралельно з'єднані – нескінчений.

Якщо γ>ω_0, тобто $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ маємо аперіодичний розряд

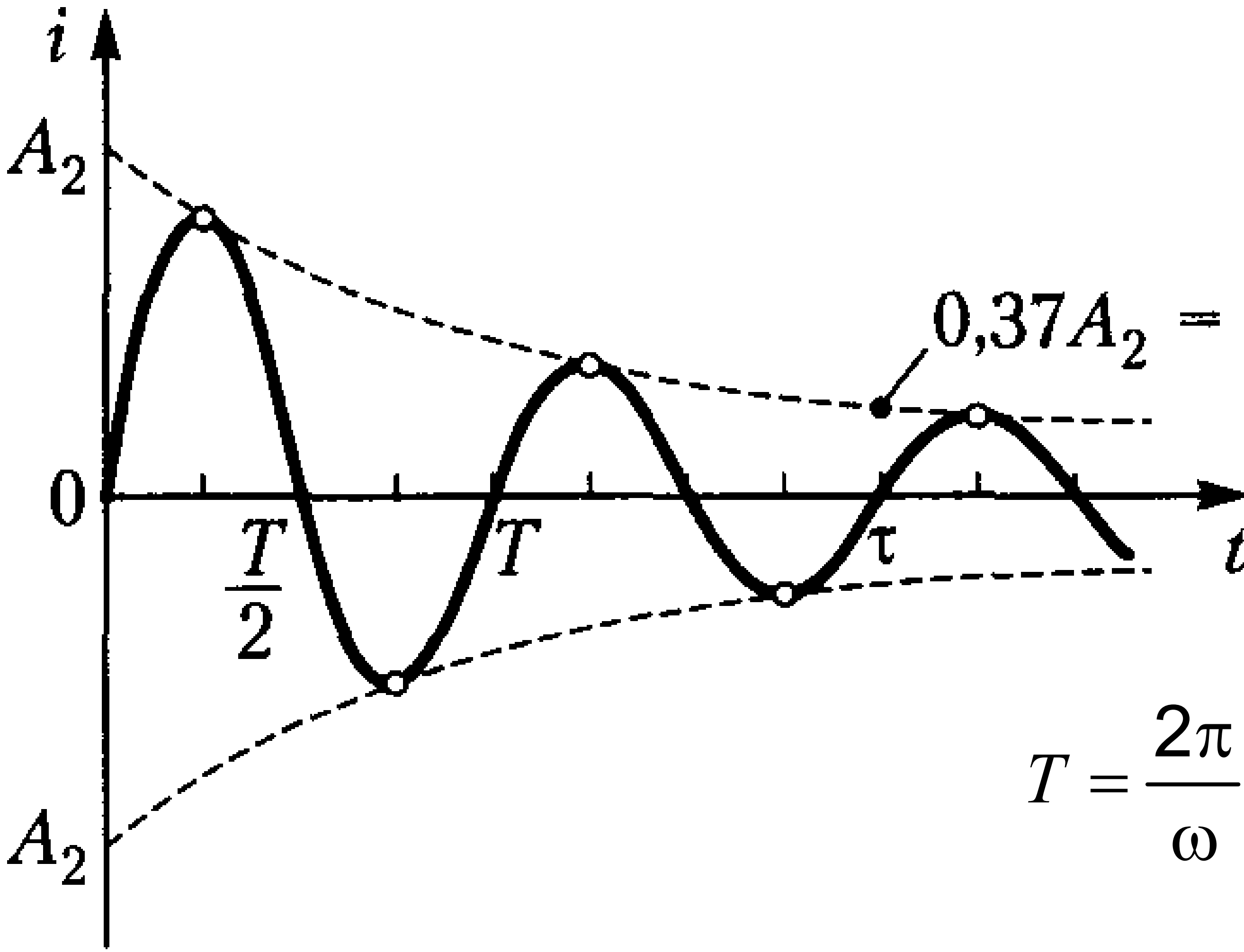


$$q = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$


Ic
Ic(t)
0
t
Ur
Ur(t)
0
t
Uc
Uc(t)
0
t
Ul
Ul(t)
0
t

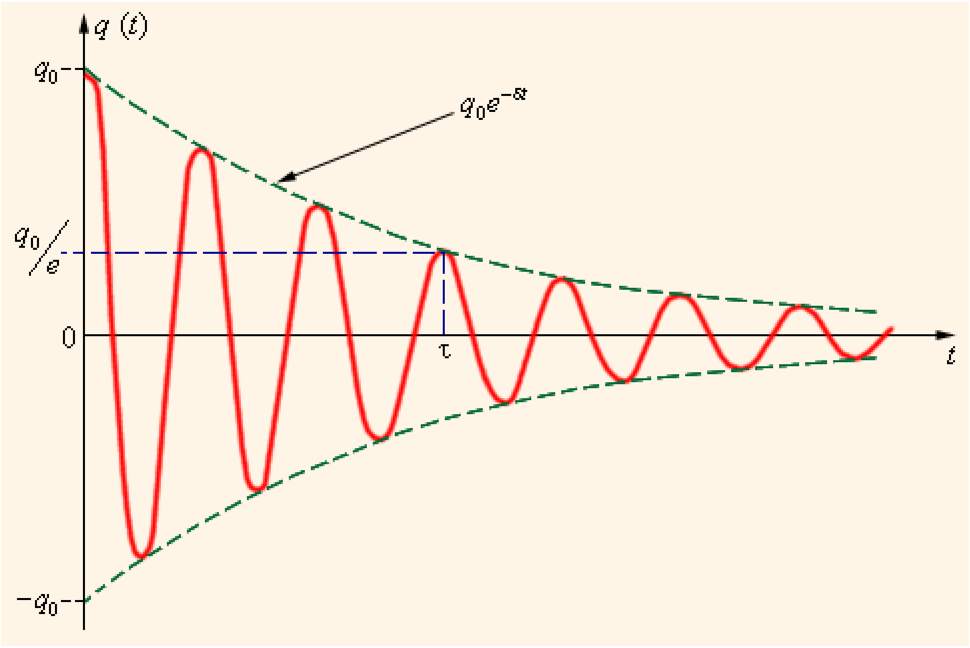
При $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ маємо два комплексних спряжених кореня

$$q = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha),\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega},\ \tau = \frac{1}{\gamma}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega},\ \tau = \frac{1}{\gamma} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

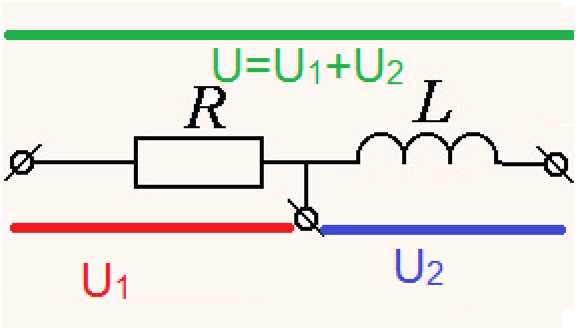


Якщо T<τ, то ω>2πγ

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega} - 1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2} - 1$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 < \frac{1}{8\pi^2} \approx 1.27\%$$

Кола, що інтегрують та беруть похідну



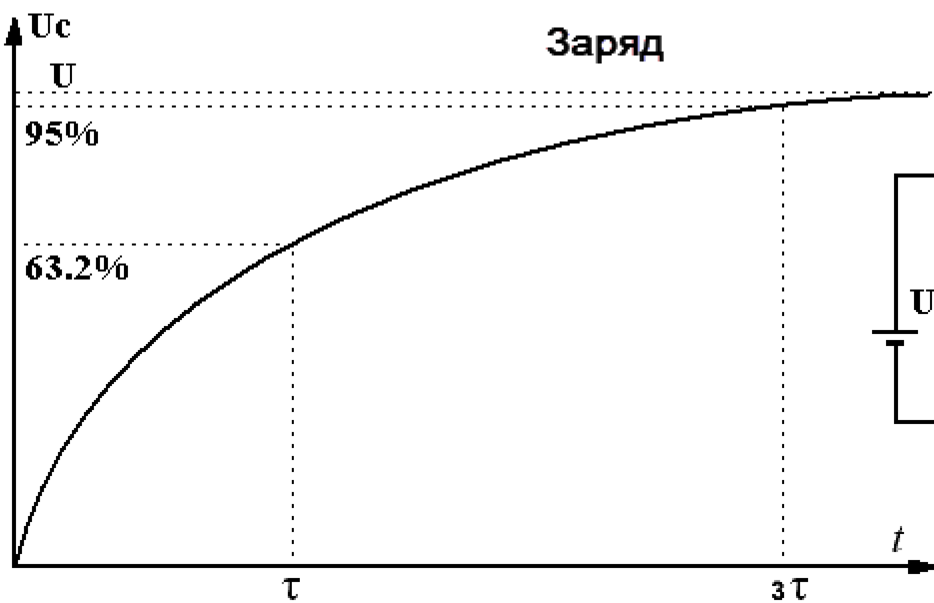
$$U_1 = RI, U_2 = L\frac{dI}{dt}, U = U_1 + U_2$$

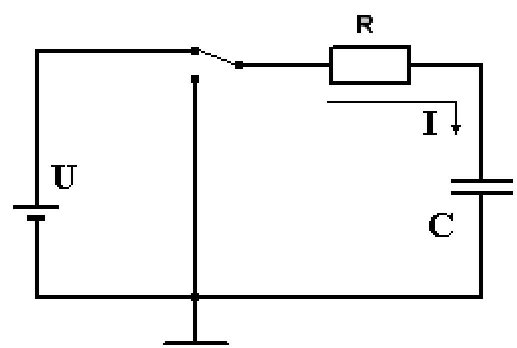
Якщо $U_2 << U_1 \approx U$, то похідна

$$U_2 \approx \frac{L}{R}\frac{dU}{dt}$$

Якщо $U_1 << U_2 \approx U$, то інтеграл

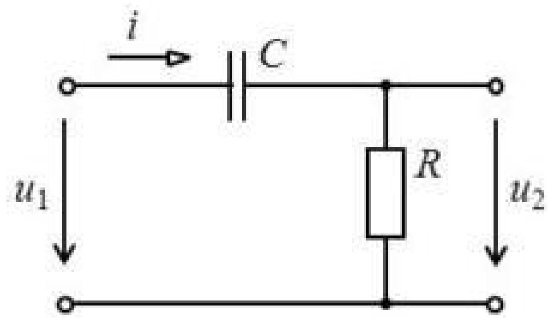
$$U_1 \approx \frac{R}{L}\int U dt$$





Можна замінити резистор та котушку на конденсатор та резистор, відповідно

Дифференцирующая цепь RC



$$u_1 = u_C + u_R \qquad u_1 \approx u_C \qquad i = C\frac{du_C}{dt} \approx C\frac{du_1}{dt}$$

$$u_R = R \cdot i \qquad u_R = u_2 = Ri \approx RC\frac{du_1}{dt} = \tau\frac{du_1}{dt}$$

$$u_2 \approx \tau\frac{du_1}{dt}$$

$\tau_C = RC$ - постоянная времени цепи RC.

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

Як ввести скалярний потенціал?

$$div\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$div\mathbf{B} = 0$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S},$$

$$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S},$$

$$\oint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = 0,$$

$$\oint \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S} = 4\pi\int_V \rho dV.$$

$$rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} =$$

$$= -grad\varphi \Rightarrow \vec{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Калибровочная свобода электродинамики

Помилка! В замість Н.

- **Полевые переменные эл.-эм. поля**

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \qquad \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- **Калибровочное преобразование**

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad \vec{A}' = A + \vec{\nabla}\varphi$$

- **Калибровочная инвариантность эл.-эм. поля**

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi' = \vec{E} \qquad \vec{H}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{H}$$

Джерела та вихрі полів

$$div\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$div\mathbf{B} = 0$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \boldsymbol{j}d\boldsymbol{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S},$$

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S},$$

$$\oint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = 0,$$

$$\oint \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = 4\pi\int_V \rho dV.$$

Поле	джерела	вихрі
E	Вільні та індуковані заряди	Змінне магнітне поле
D	Вільні заряди	Змінне магнітне поле, неоднорідність діелектричної проникливості
B	Нема	Мікро- та макроструми, змінне електричне поле
H	Неоднорідність магнітної проникливості	Макроструми, змінне електричне поле

$$div\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$div\mathbf{B} = 0$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}\right)dV = \frac{1}{8\pi}\int\left(\varepsilon E^2 + \mu B^2\right)dV$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\dot{\vec{D}}\vec{E} + \dot{\vec{B}}\vec{H}\right)dV =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\left((c\,rot\,\vec{H} - 4\pi\vec{j})\vec{E} - c\,rot\vec{E}\,\vec{H}\right)dV$$

$$= \int\left(\vec{j}\vec{E} - \frac{c}{4\pi}div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\right)dV$$

Закон Ома $\vec{E} = \rho\vec{j} - \vec{E}^{стор}$

Вектор Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right](SGS) = \left[\vec{E}\times\vec{H}\right](SI)$

$\frac{\vec{S}}{c}$ Тиск

$\frac{\vec{S}}{c^2}$ Поверхнева густина імпульсу

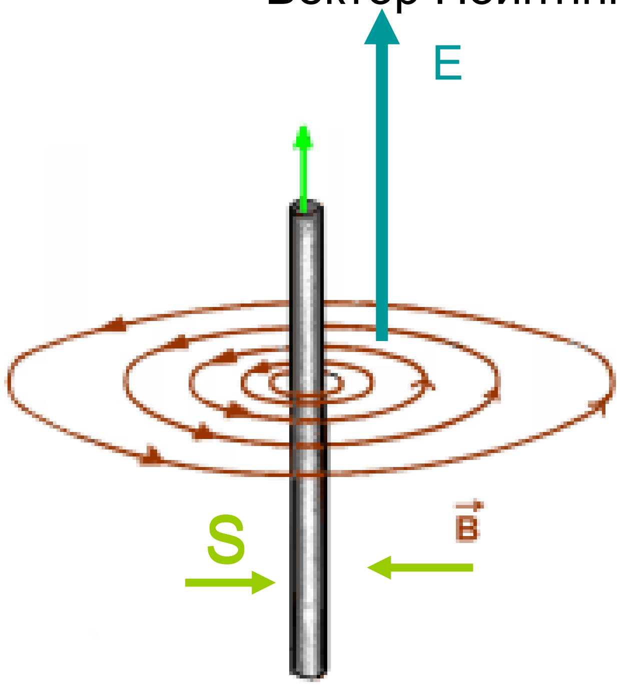
$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int\left(\vec{j}\vec{E} - div\,\vec{S}\right)dV = P^{стор} - P_{J-L} - \oint_S \vec{S}d\vec{s}$$

Прямий нескінчений дріт з током з радіусом r. Вектор Пойнтінга спрямован всередину. Поля на поверхні довівнюють

$$E = \rho J = \rho \frac{I}{S_{перерізу}}, \; H = \frac{2I}{cr}$$

Вектор Пойнтінга дорівнює

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} \rho \frac{I}{S_{перерізу}} \frac{2I}{cr} = \rho \frac{I^2}{2\pi r S_{перерізу}}$$



У ділянку довжиною l потрапляє потужність

$$P = 2\pi r l S = \rho \frac{I^2}{S_{перерізу}} l = RI^2, R = \rho \frac{l}{S_{перерізу}}$$

Єдність розв'язку рівнянь Максвела.

Маємо ділянку простору. При t=0 ми знаємо початковий розподіл електричного E та магнітного H полів. Відома поведінка сторонніх сил за весь час від t=0 до певного t, а також тангенціальні компоненти напруженості одного з полів на границі області. Треба довести, що в момент часу t>0 можна однозначно визначити розподіл електричного E та магнітного H полів на ділянці.

Нехай маємо два розв'язки E_1 та E_2, тоді $E_3=E_1-E_2$, $H_3=H_1-H_2$ також розв'язок з початковими умовами $E_3(t=0)=H_3(t=0)=0$, $\vec{E}^{стор}=0,\ \vec{E}_t=0\ або\ \vec{H}_t=0$

Тобто потік вектора Пойнтінга для цього поля нульовий,

$$W(t=0)=0,\ P^{стор}=0,\ \oint_S \vec{S}d\vec{s}=0,\ P_{J-L}\geq 0$$ тому

$$\frac{\partial W}{\partial t}\leq 0,\ W(t>0)\leq 0,\ але\ W\geq 0$$ єдина можливість це

$$W=0\Rightarrow \vec{E}_3=\vec{H}_3=0\Rightarrow \vec{E}_1=\vec{E}_2,\ \vec{H}_1=\vec{H}_2$$

$$div\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$div\mathbf{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\rho = \vec{j} = 0$$

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$rot\,rot\,\vec{E} = grad\,div\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = -\frac{1}{c}rot\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial rot\,\vec{H}}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta\vec{E} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\ V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2},\ \Delta\vec{D} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2},\ \Delta\vec{B} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

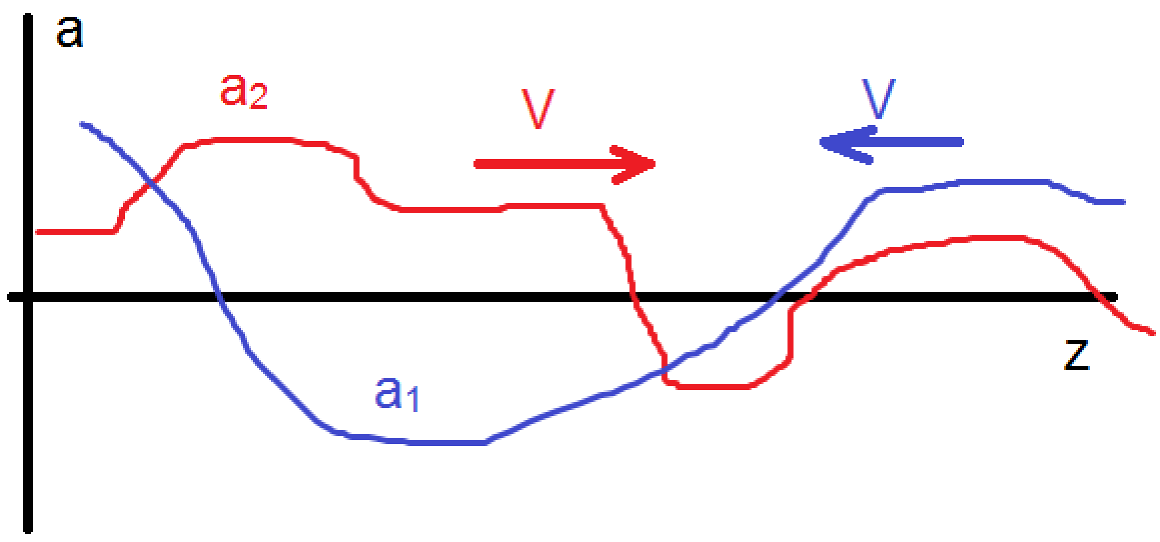
$$\Delta a = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \text{скалярне наближення}$$

Скалярні хвилі

$$\Delta a = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$$

Плоскі хвилі $a = a(z,t)$ $\qquad \dfrac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 a}{\partial (Vt)^2},\ \xi,\zeta = z \pm Vt \Rightarrow \dfrac{\partial^2 a}{\partial\xi\,\partial\zeta} = 0$

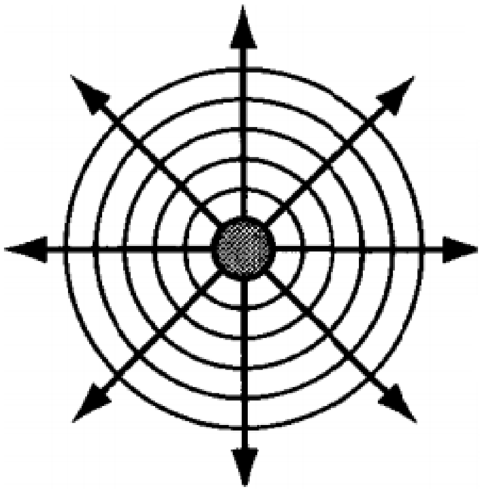
$$a = a_1(\xi) + a_2(\zeta) = a_1(z+Vt) + a_2(z-Vt)$$



$$\begin{cases} z \to z' = z - V\Delta t \\ t \to t' = t + \Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \to z' = z + V\Delta t \\ t \to t' = t + \Delta t \end{cases}$$

Сферичні хвилі $a = a(r,t)$ $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ra)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial (Vt)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 (ra)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (ra)}{\partial (Vt)^2}$



$$a = \frac{a_1(r+Vt) + a_2(r-Vt)}{r}$$

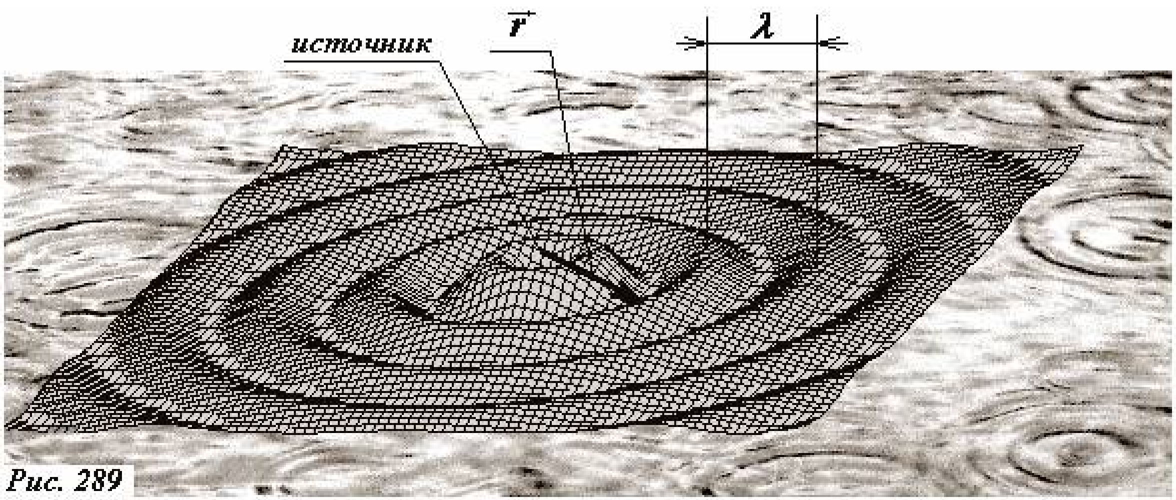


Рис. 289

Гармонічні хвилі

$$a \propto \cos(kz - \omega t + \delta) \propto \cos(const * \left(z - Vt\right) + \delta)$$

$$V = \frac{\omega}{k},\ k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow V = \nu\lambda$$

$$\boxed{V = \nu\lambda}$$

$$a \propto \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) = \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta)$$

$$k = \left|\vec{k}\right|$$

$$\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) \Rightarrow \exp\left(\pm i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta)\right)$$

$$\exp\left(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta)\right)\ \textit{Ландау, Борн, Тамм}$$

$$\exp\left(-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta)\right) = \exp\left(i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \delta)\right)\textit{Сивухін}$$

$$div\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

Векторні хвилі

$$div\mathbf{B} = 0$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\left[\vec{s}\times\vec{E}'\right] = \frac{\mu V}{c}\vec{H}'$$

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\left[\vec{s}\times\vec{H}'\right] = -\frac{\varepsilon V}{c}\vec{E}'$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{s}\vec{r} - Vt),\ \vec{H} = \vec{H}(\vec{s}\vec{r} - Vt)$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -V\vec{E}',\ rot\vec{E} = \left[\vec{s}\times\vec{E}'\right]$$

$$\left(rot\vec{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = E_z' s_y - E_y' s_z = \left[\vec{s}\times\vec{E}'\right]_x$$

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\vec{s}\times\vec{H}\right] \qquad \left(\vec{s}\vec{E}\right) = \left(\vec{s}\vec{H}\right) = 0$$

$$\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{s}\times\vec{E}\right] \qquad \vec{E}, \vec{H}, \vec{s} - \textit{права трійка}$$

Поперечна хвиля

Густина енергії та вектор Пойнтінга $w = \dfrac{\varepsilon E^2}{4\pi} = \dfrac{\mu H^2}{4\pi}, \ \vec{S} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} w\vec{s} = Vw\vec{s}$

$$\boxed{I \sim E^2}$$

Монохроматичні плоскі хвилі

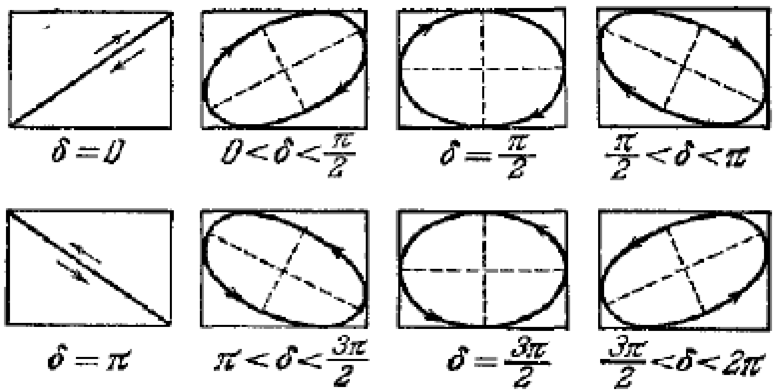


Рис. 1.7. Эллиптическая поляризация при различных значениях разности фаз δ.

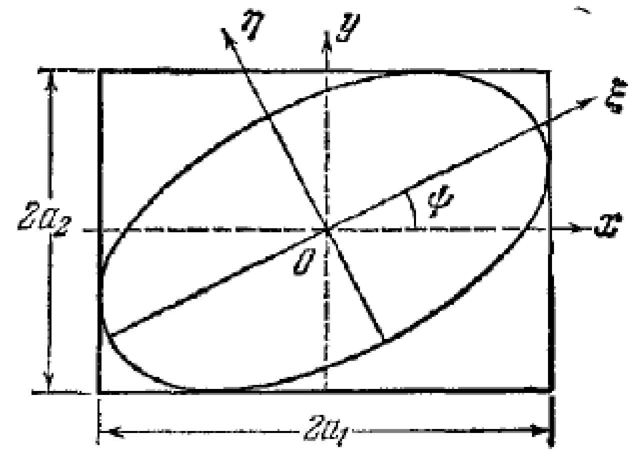
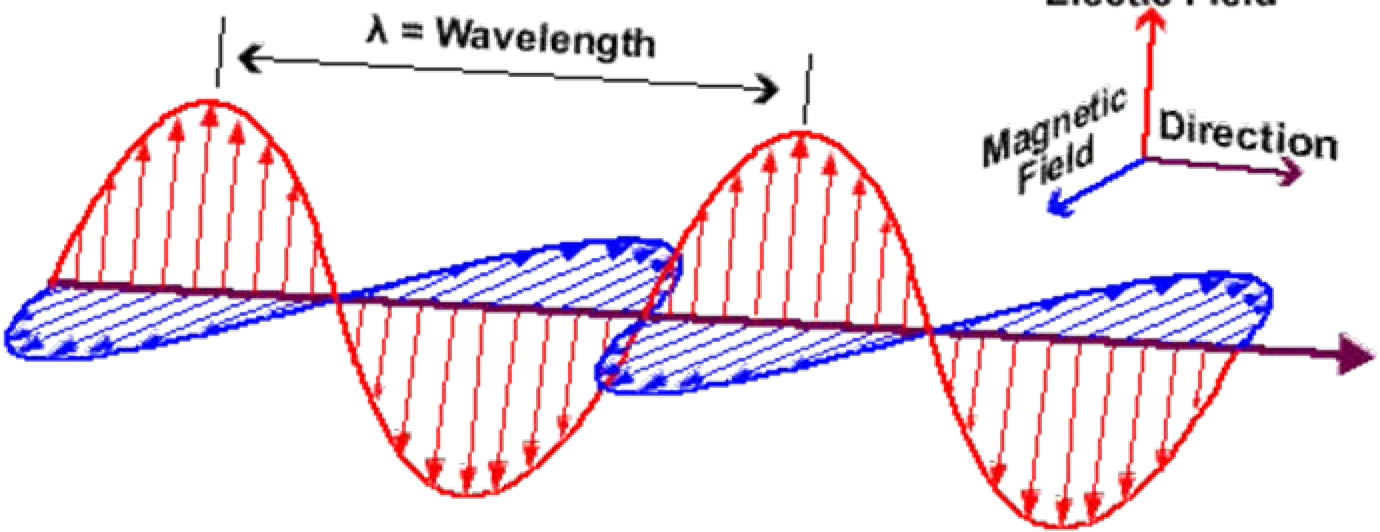
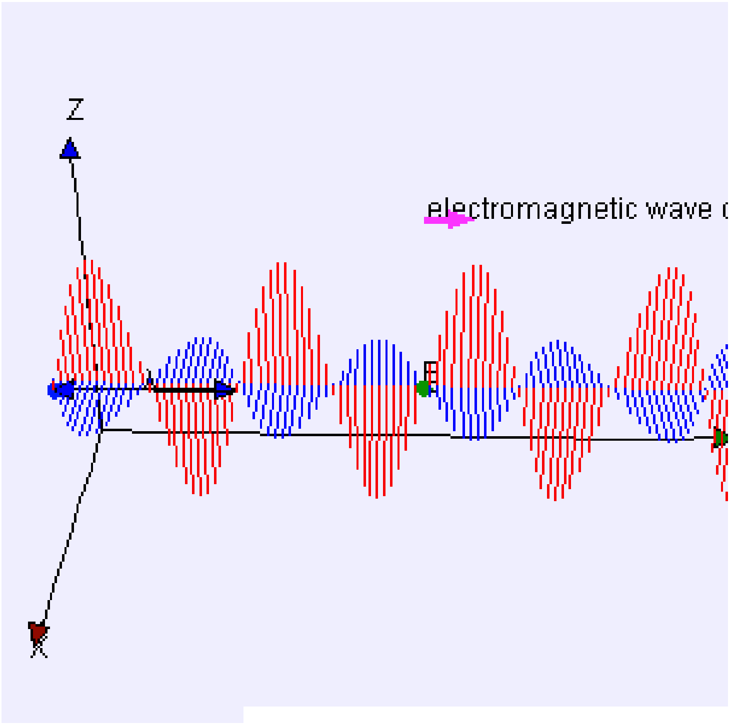


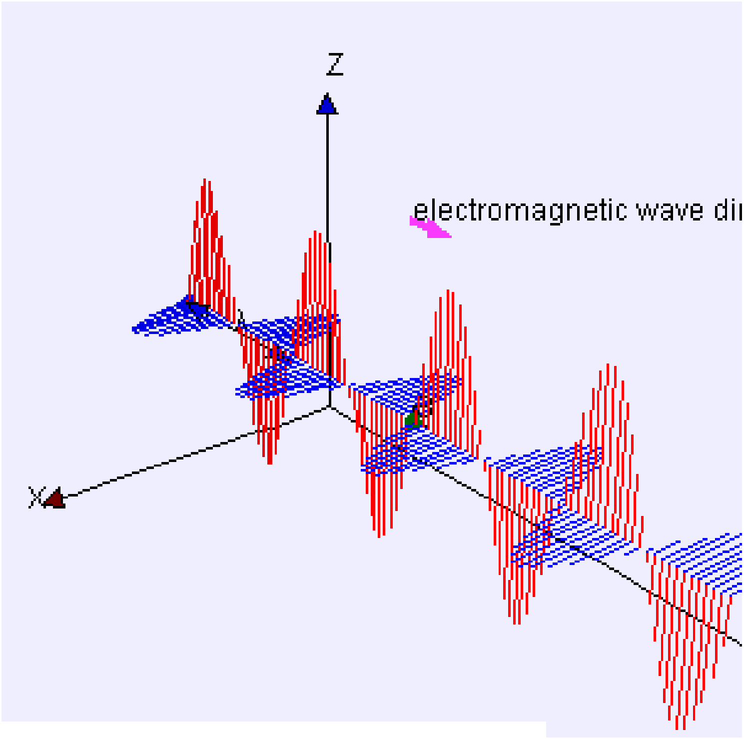
Рис. 1.6. Эллиптически поляризован ная волна

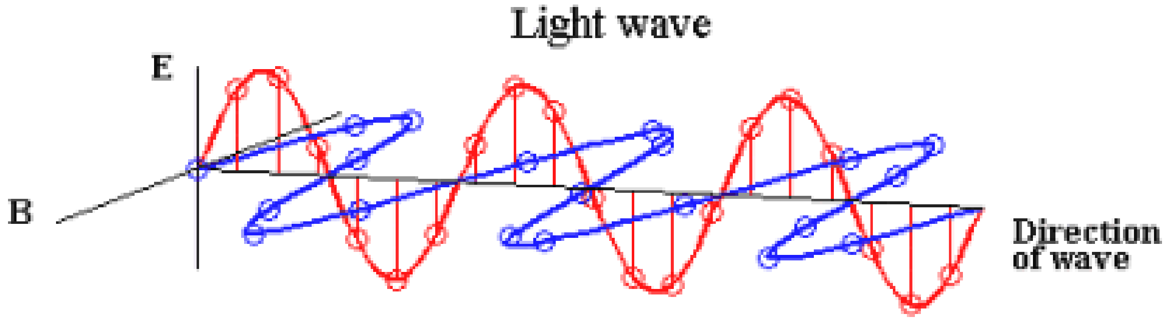
Эллипс соответствующий колебанию электрического вектора



Лінійна поляризація

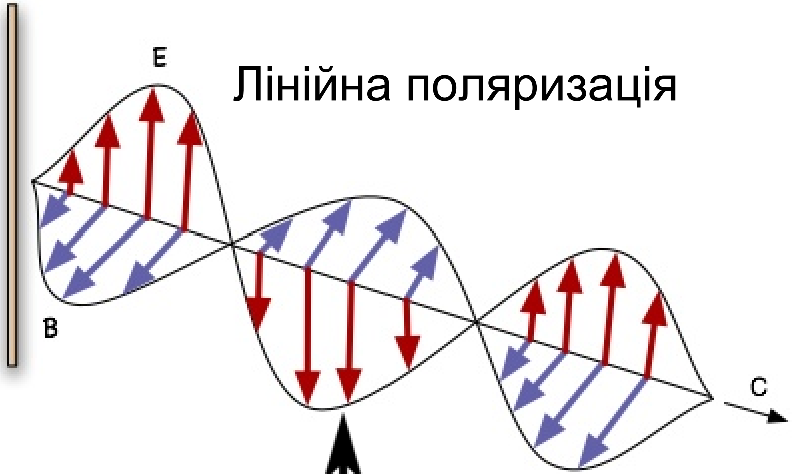


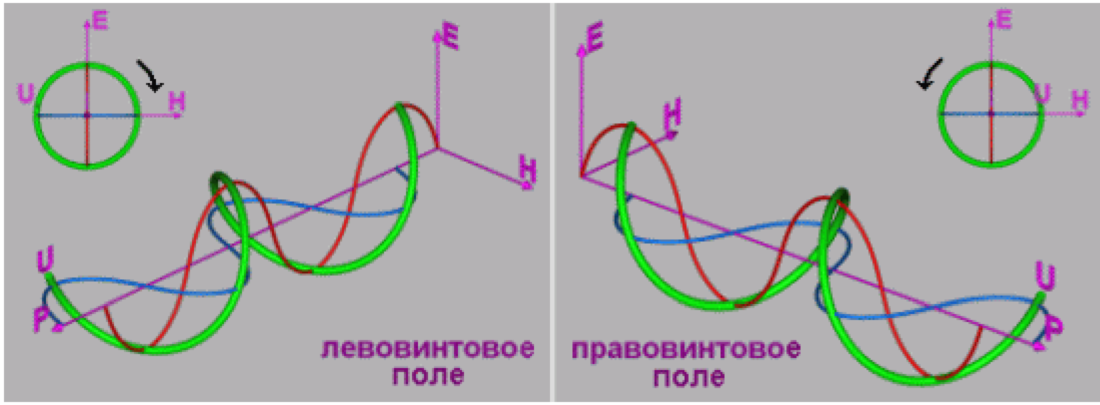


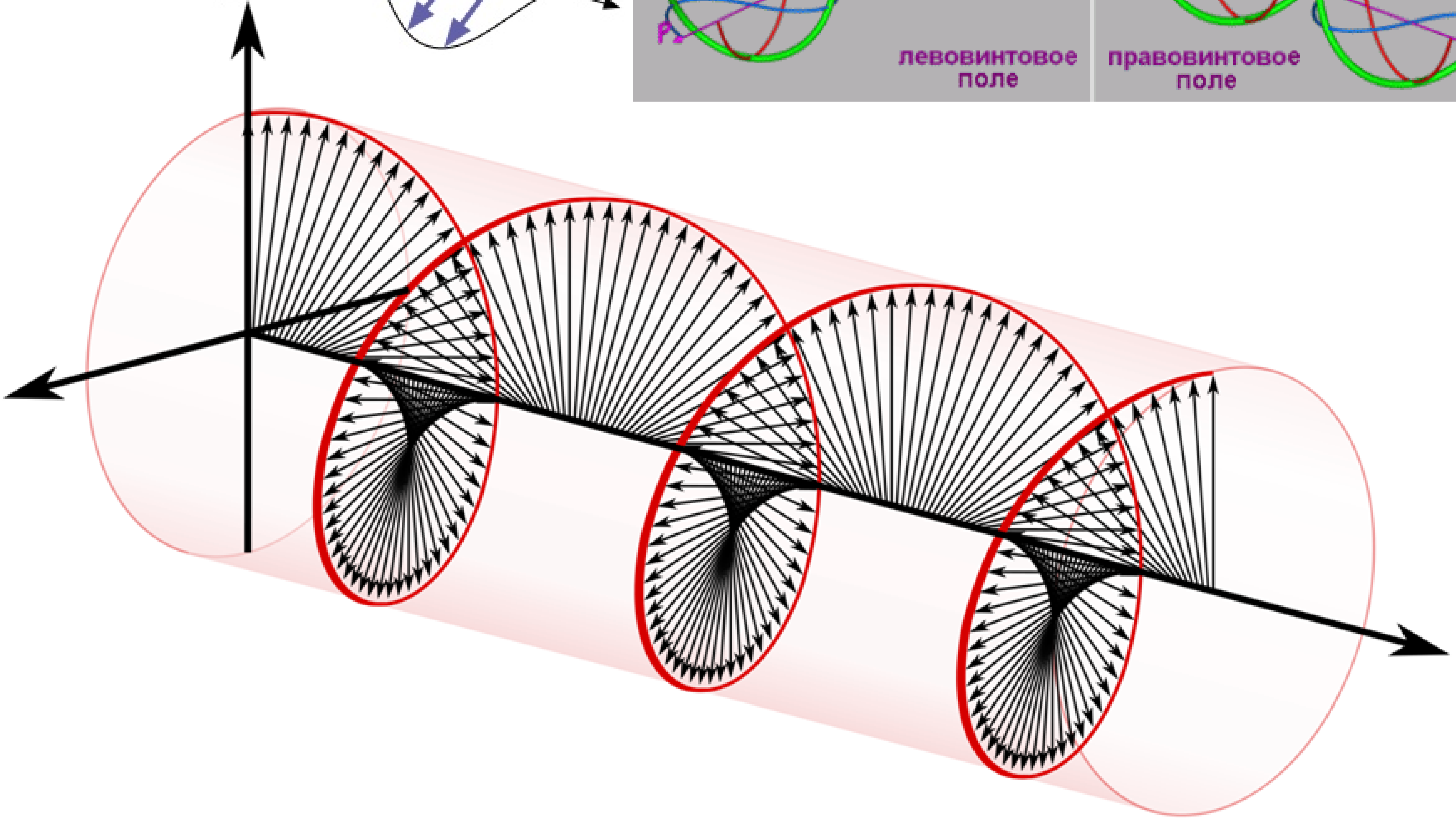


Лінійна поляризація

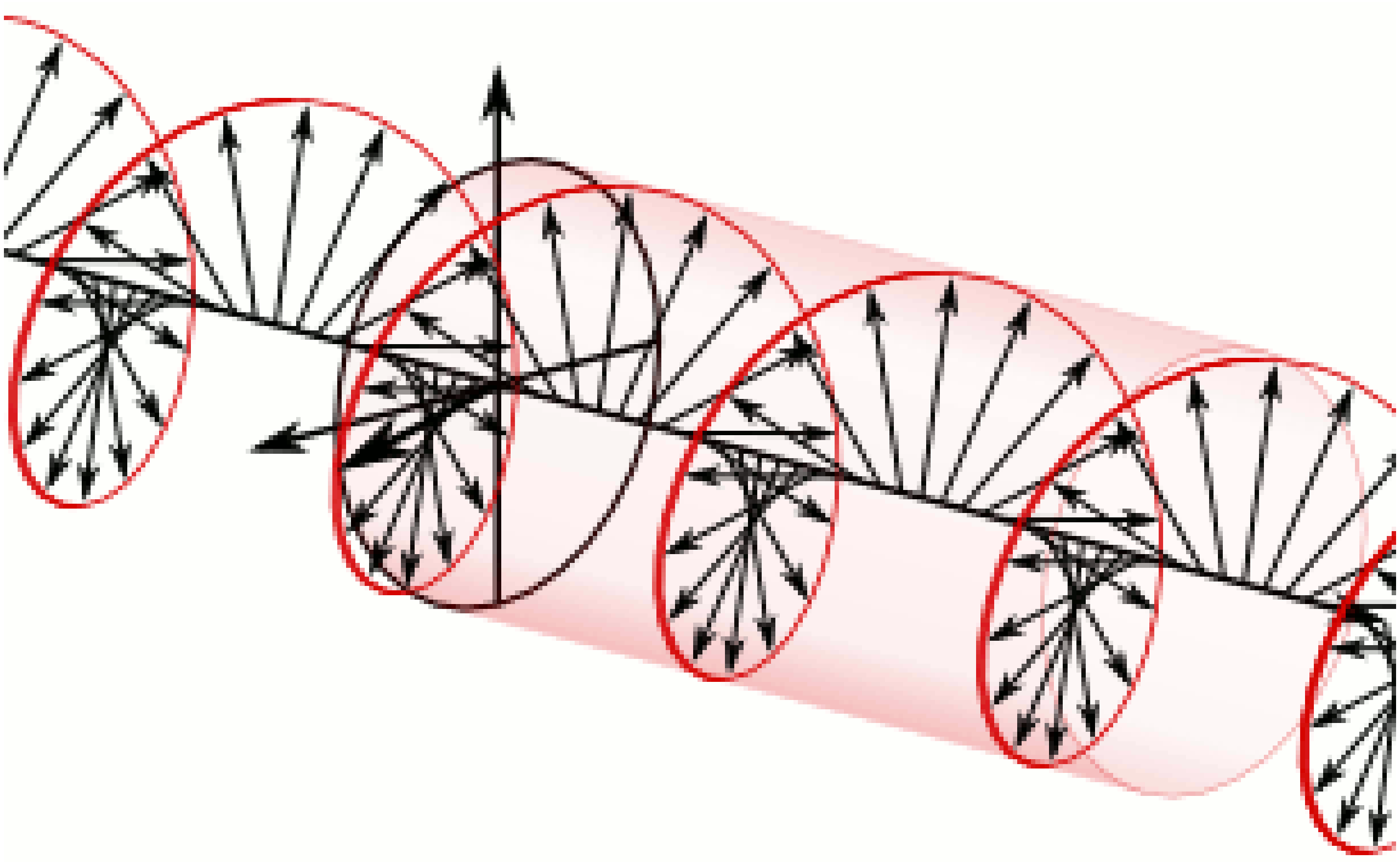
Поляризація по колу





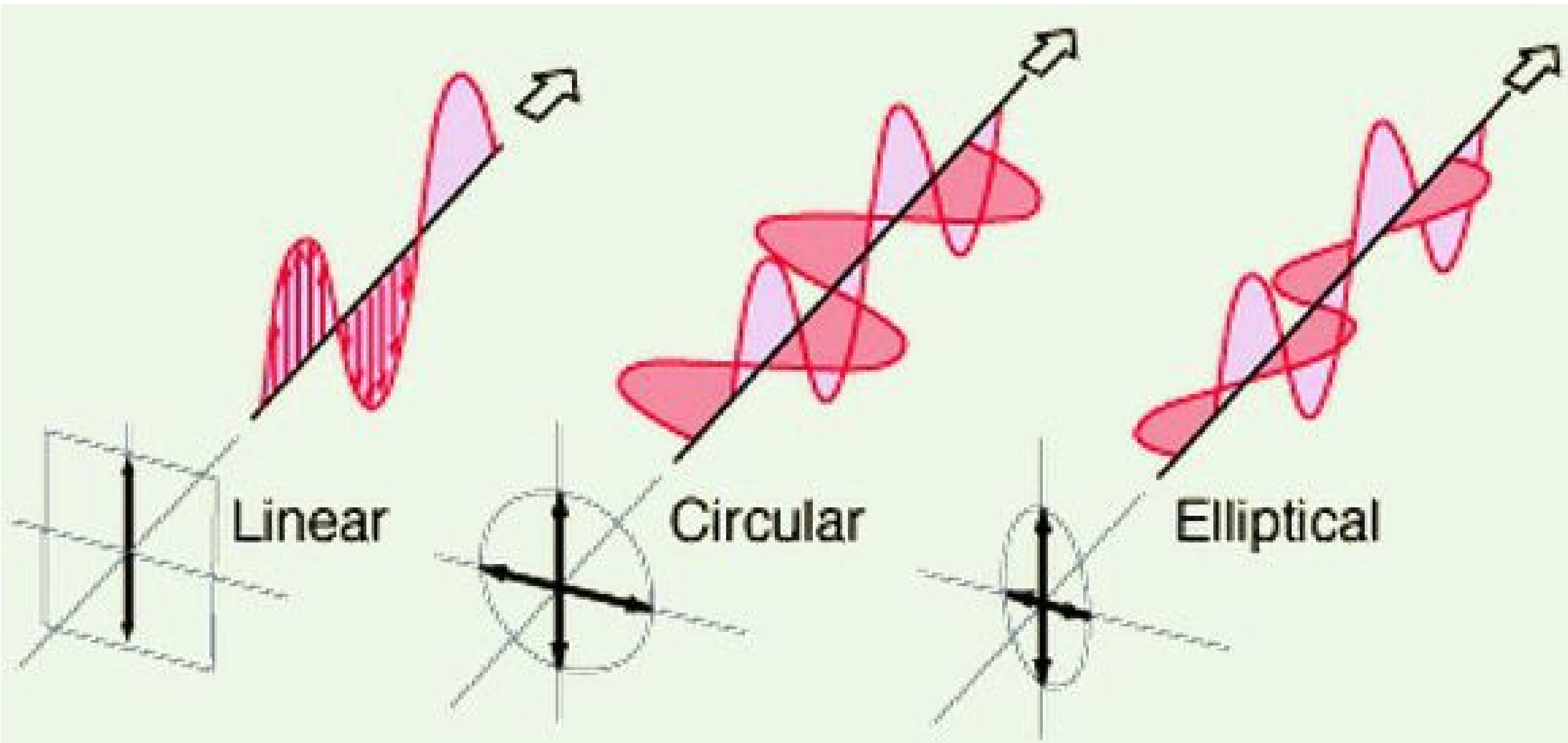


Поляризація по колу



Ліва поляризація. Якщо дивиться назустріч променю, то E обертається проти годинникової стрілки.

Еліптична поляризація



Природнє та поляризоване світло

В 1808 г. французский физик Этьен Луи Малюс, глядя сквозь кусок исландского шпата на блестевшие в лучах заходящего солнца окна Люксембургского дворца в Париже, к своему удивлению заметил, что при определённом положении кристалла было видно только одно изображение. На основании этого и других опытов и опираясь на корпускулярную теорию света Ньютона, он предположил, что корпускулы в солнечном свете ориентированы беспорядочно, но после отражения от какой-либо поверхности или прохождения сквозь анизотропный кристалл они приобретают определённую ориентацию. Такой «упорядоченный» свет он назвал поляризованным.

В 1810 году Малюс открыл закон, выражающий зависимость интенсивности линейно-поляризованного света после его прохождения через поляризатор от угла между плоскостями поляризации падающего света и поляризатора.