С.Л. Парновський

Оптика

Лекція 12

Теплове випромінювання

Закон Кірхгофа

$$d\Phi = E_\omega dS \cos\varphi\, d\omega\, d\Omega\, dt$$

Теплова рівновага. На площу падає енергія

$$d\Phi_1 = I_\omega dS \cos\varphi\, d\omega\, d\Omega\, dt$$

I_ω Питома інтенсивність випромінювання

Відбивається

$$d\Phi_2 = (1 - A_\omega) I_\omega dS \cos\varphi\, d\omega\, d\Omega\, dt$$

A_ω Коеф. поглинання

Випромінюється

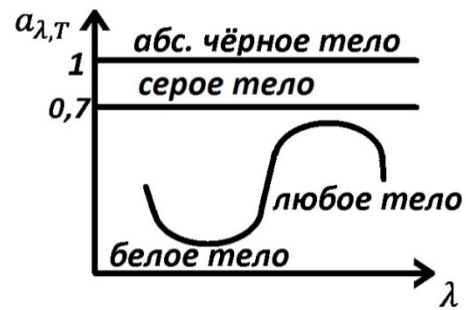
$$d\Phi_3 = E_\omega dS \cos\varphi\, d\omega\, d\Omega\, dt$$

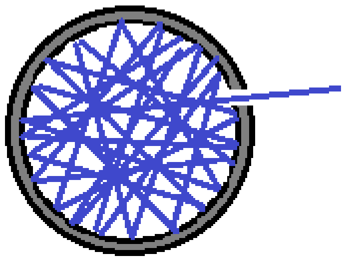
$$d\Phi_1 = d\Phi_2 + d\Phi_3 \Rightarrow E_\omega = A_\omega I_\omega$$

Чайник, термос

Абсолютно чорне тіло A_ω=1

випромінює за Ламбертом





Знайдемо густину енергії теплового випромінювання

$$W_\omega = u_\omega dV,\ dV = dS\ cdt,\ \cos\varphi = 1$$

$$d\Phi = I_\omega dS \cos\varphi\, d\omega\, d\Omega\, dt$$

$$u_\omega = \frac{1}{c}\int I_\omega d\Omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega$$

Знайдемо кількість станів у скрині розміром a x b x c з частотою до ω

$$e^{-i\omega t}\sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z,\ V = abc,\ k \le \frac{\omega}{c}$$

$$k_x a = n_1\pi,\ k_y b = n_2\pi,\ k_z c = n_3\pi,$$

$$N = \frac{\frac{4\pi}{3}k^3}{\frac{\pi}{a}\frac{\pi}{b}\frac{\pi}{c}} \times 2 \times \frac{1}{8} = \frac{k^3}{3\pi^2}V = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3}V$$

Релей-Джинс. Якщо на кожен ступінь вільності енергія kT, то повна енергія дорівнює нескінченності (ультрафіолетова катастрофа)

Нехай є n фотонів з частотою ω, їх енергія дорівнює

$$E = n\hbar\omega$$

Ймовірність пропорційна

$$p \sim \exp(-n\hbar\omega / kT) = e^{-n\beta}, \ \beta = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\hbar\omega e^{-n\beta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta}} = \hbar\omega \frac{e^{-\beta}\left(1 - e^{-\beta}\right)^{-2}}{\left(1 - e^{-\beta}\right)^{-1}} = \hbar\omega \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta} - 1}$$

При β<<1

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta} - 1} \approx \frac{\hbar\omega}{\beta} = kT$$

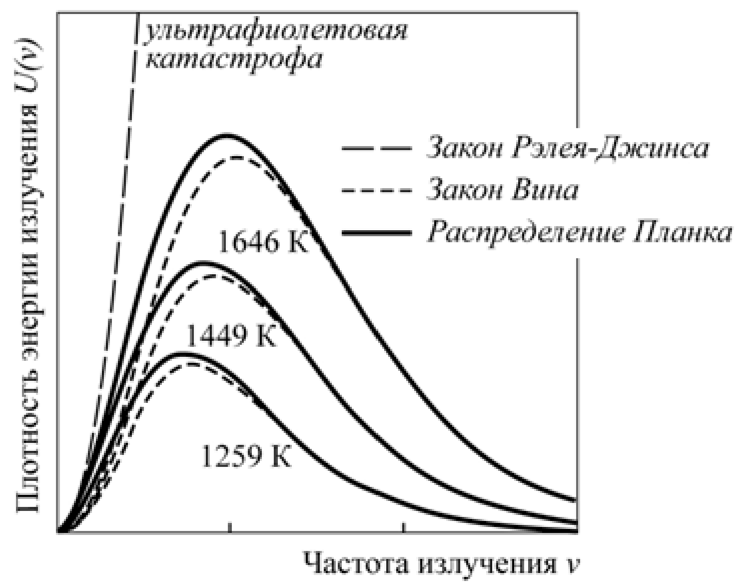
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} = \left(1 - e^{-\beta}\right)^{-1},$$

$$\frac{d}{d\beta}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} = -\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta} = \frac{d}{d\beta}\left(1 - e^{-\beta}\right)^{-1} = -e^{-\beta}\left(1 - e^{-\beta}\right)^{-2}$$

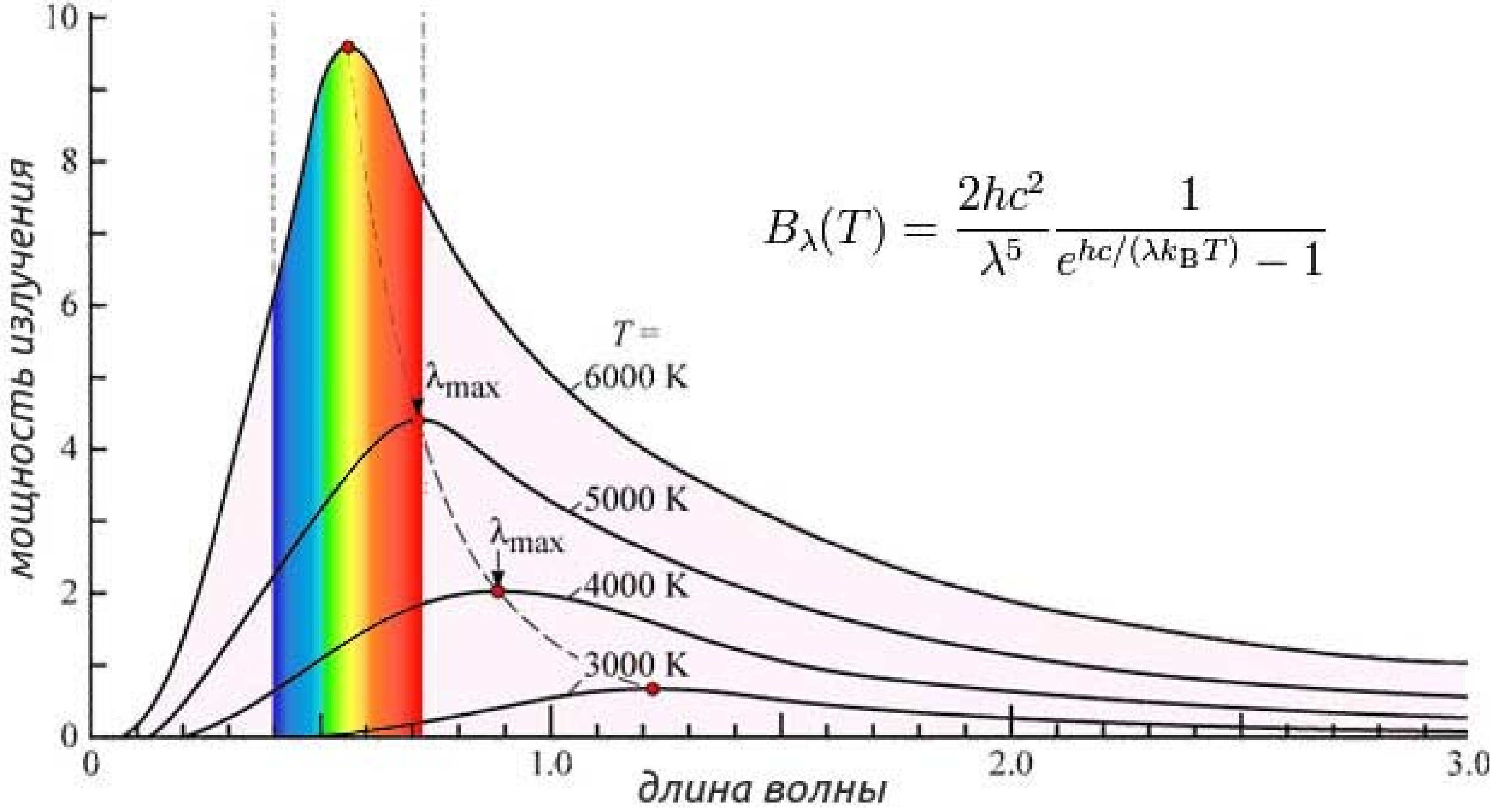
$$\frac{N}{V}=\frac{\omega^3}{3\pi^2c^3},\quad \frac{dN}{V}=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}d\omega$$

$$u_\omega d\omega=\frac{dN}{V}\overline{E}=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}d\omega\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

$$u_\omega=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)}$$



$$\hbar\omega_{\max}\approx 2.822\,kT$$



$$\lambda_{\max} T \approx 2.9 10^{-3}\, m K$$

Повний потік випромінювання з одиниці площі дорівнює

$$\sigma T^4, \ \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} \approx 5.6710^{-5} \frac{g}{c^3 K^4}$$

§ 151. Спектральные серии. Комбинационный принцип. Линии атомарного водорода располагаются с очевидной закономерностью в ряд, или серию. Швейцарец Бальмер в 1885 г. первый выразил связь между длинами волн ряда в виде общей формулы, а именно, в виде

$$\lambda = 3645{,}6 \frac{n^2}{n^2 - m^2} \ \text{Å} \tag{228}$$

($\text{Å} = 10^{-10}$ *м*), причем n и m должны быть целыми числами. В частном случае, отвечающем рис. 315, m постоянно и равно 2, а $n = 3, 4, 5, \ldots$

К. Рунге в 1888 г. заменил длину волны частотой ν, а Ридберг в 1890 г. придал «сериальной формуле» для водорода вид, общепринятый в настоящее время,

$$\boxed{\nu = R_y \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).} \tag{229}$$

Коэффициентом пропорциональности в этой формуле служит R_y — частота Ридберга $= 3{,}2869 \cdot 10^{15}$ *сек*$^{-1}$.

Позднее, кроме серий Бальмера, для атомарного водорода были найдены еще и другие серии; в настоящее время известны следующие пять серий:

$$\nu = R_y \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \text{ Лайман, 1906 г.,} \tag{230}$$

$$\nu = R_y \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \ldots, \text{ Бальмер, 1885 г.,} \tag{231}$$

$$\nu = R_y \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \ldots, \text{ Пашен, 1908 г.,} \tag{232}$$

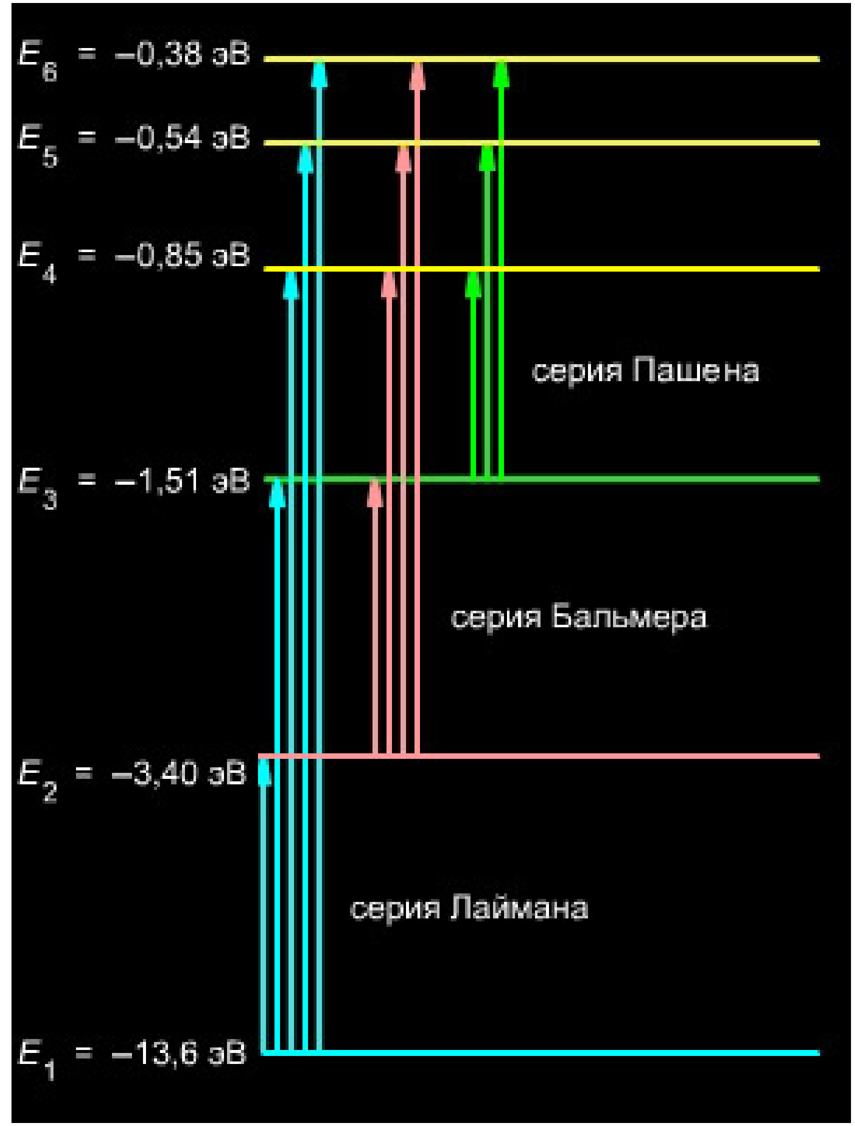
$$\nu = R_y \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, 7, \ldots, \text{ Брэккет, 1922 г.,} \tag{233}$$

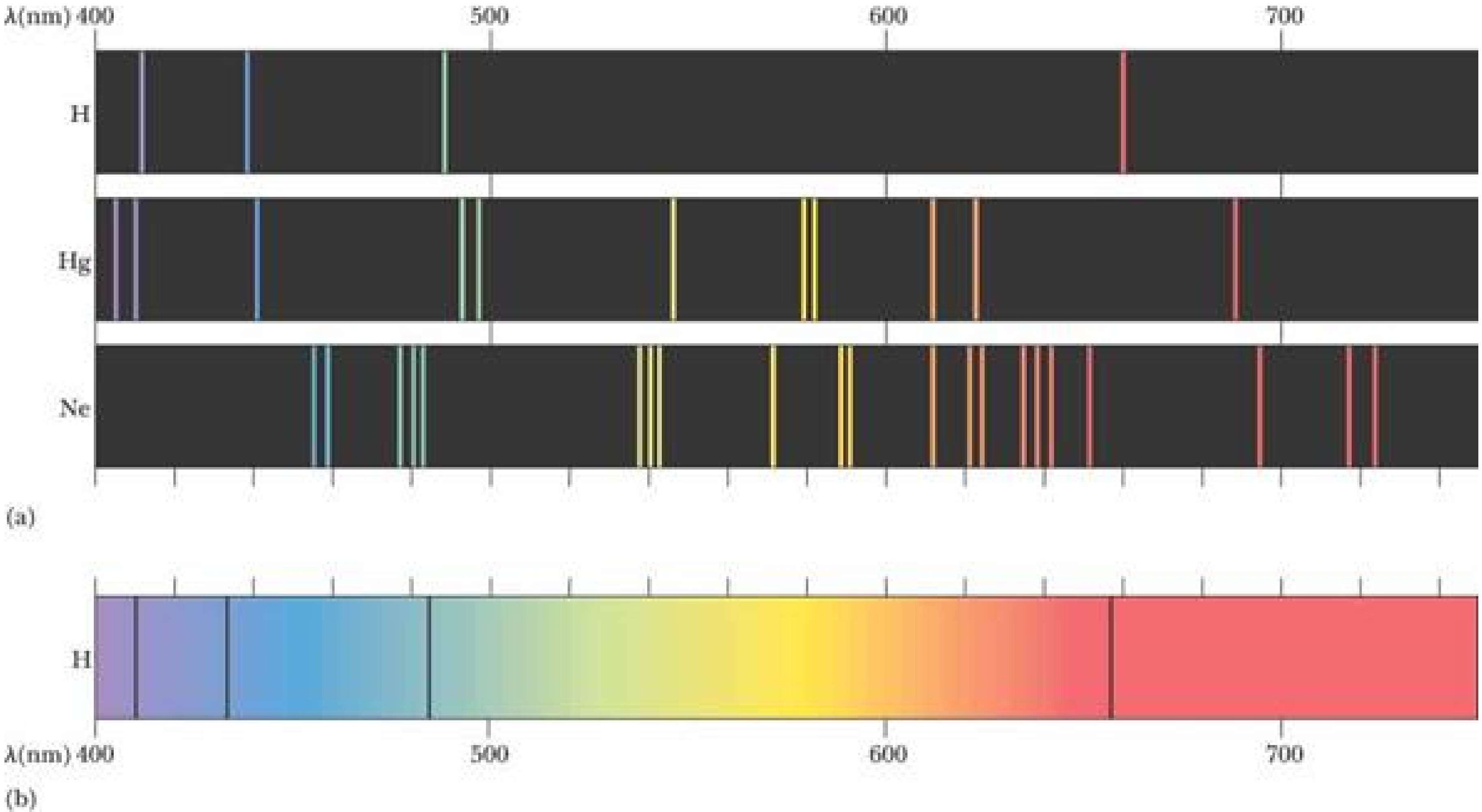
$$\nu = R_y \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 6, 7, 8, \ldots, \text{ Пфунд, 1924 г.} \tag{234}$$

Сериальная закономерность расположения спектральных линий свойственна отнюдь не только простейшему из атомов, атому водорода. Еще до 1900 г. она была установлена для многих атомов. Ридберг указал общую структуру сериальной формулы

$$\nu = R_y \left(\frac{1}{(m+s)^2} - \frac{1}{(n+p)^2} \right). \tag{235}$$

Здесь снова m есть малое и в пределах серии постоянное целое число 1, 2, 3 ..., а n (большее m) для линий одной серии принимает значения ряда целых чисел: n является *переменным числом*. Величины m и n складываются с малыми десятичными дробями, обозначаемыми в уравнении (235) через s и p, а в других сериальных формулах — через d и f.




λ(nm) 400
500
600
700
H
Hg
Ne
(a)
H
λ(nm) 400
500
600
700
(b)

§ 170. Боровская модель атома водорода. В сериальные формулы, положенные в основу схемы уровней, входила эмпирически найденная частота R_y, связанная с именем Ридберга. Бору *удалось выразить эту частоту через элементарное количество электричества e и постоянную Планка h*. Для этого он воспользовался планетарной моделью атома водорода. Сначала он рассмотрел простейший случай — круговую орбиту.

Положительный элементарный заряд $+e$ притягивает отрицательный заряд $-e$ с силой, равной

$$\mathfrak{K} = \frac{e^+e^-}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{245}$$

(«Электричество», уравнение (21)), или сокращенно

$$\mathfrak{K} = \frac{a}{r^2}, \quad \text{где} \quad a = \frac{e^+e^-}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{246}$$

Здесь ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума $= 8{,}86 \times \times 10^{-12}$ *а · сек/в · м*.

При движении по окружности со скоростью u эта сила вызывает радиальное ускорение, равное

$$\frac{m_e u^2}{r} = \frac{a}{r^2} \tag{247}$$

(см. «Механика»), или

$$r = \frac{a}{m_e u^2}, \tag{248}$$

где m_e — масса электрона $= 9 \cdot 10^{-31}$ *кг*. (Индекс e необходим здесь для того, чтобы не смешивать массу электрона с квантовым числом m, которым мы будем пользоваться ниже.)

На этой круговой орбите частота обращения электрона равна

$$\nu^0 = \frac{u}{2r\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r^3 m_e}}, \tag{249}$$

а *его кинетическая энергия* —

$$W_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m_e u^2 = \frac{1}{2}\frac{a}{r}. \tag{250}$$

Теперь делается решающий шаг. Планетарная модель неустойчива вследствие затухания, вызванного излучением (см. § 157). Но Бор насильно заставляет ее быть устойчивой. Он говорит: затухание вследствие излучения следует из классической электродинамики, т. е. из уравнений Максвелла. Последние перестают быть справедливыми внутри атома. Внутри атома господствует постоянная Планка h. С ее помощью можно сформулировать *условие устойчивости*, которое гласит: действие, т. е. импульс, умноженный на длину пути, равен целому кратному числа h, элементарного кванта действия

$$m_e u \cdot 2r\pi = nh, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{254}$$

Число n называется *главным квантовым числом*. Его значение выясняется в § 190. Подстановка этого условия устойчивости в написанные выше уравнения (248), (249) и (253) дает для *устойчивых* орбит в n-м состоянии радиусы [1])

$$r_n = \varepsilon_0 \frac{h^2}{\pi m_e e^2} n^2, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{255}$$

частоты обращения

$$\nu_n^0 = \frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{e^4 m_e}{4h^3}\frac{1}{n^3}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{256}$$

и *полные энергии*

$$W_n = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{e^4 m_e}{8h^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{257}$$

---

[1]) $n=1$ определяет радиус наименьшей из устойчивых орбит в атоме водорода. Получается $r_{\text{мин}} = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ *м*.

Здесь $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *вт · сек*^{2}, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *а · сек*, масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*, диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ *а · сек/в · м*.

Уравнение (257) можно выразить словами так: с возрастанием n, т. е. целого числа, входящего в условие устойчивости (254), полная энергия обращающегося электрона увеличивается до максимального значения, равного нулю. Переход с m-й на n-ю устойчивую орбиту может происходить лишь при поглощении порции энергии

$$\Delta W = W_n - W_m = \frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{e^4 m_e}{8h^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{258}$$

§ 173. Уточненные значения ридберговской частоты. Из эмпирических сериальных формул мы получаем для частоты Ридберга следующие величины:

$$\text{для иона He}^+ \quad R_{y,\ \mathrm{He}^+} = 3{,}28823 \cdot 10^{15}\ сек^{-1},$$

$$\text{для атома H} \quad R_{y,\ \mathrm{H}} = 3{,}28688 \cdot 10^{15}\ сек^{-1}.$$

Отношение этих величин равно

$$R_{y,\ \mathrm{He}^+} : R_{y,\ \mathrm{H}} = 1{,}00041.$$

Ввиду большой точности спектроскопических измерений различие между этими частотами Ридберга лежит вне пределов ошибки опыта. Это различие тотчас же устраняется, если при выводе соотношения (261) не пренебрегать одним обстоятельством. Дело в том, что мы считали *центр ядра* центром круговой орбиты электрона. В действительности же электрон и ядро обращаются, подобно Земле и Луне, вокруг своего общего *центра масс*. Учитывая это, надо ввести в формулу (261) поправочный множитель, содержащий отношение m_e/m_k, т. е. отношение массы электрона к массе ядра. Тогда мы получим

$$R_y = \frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{e^4 m_e}{8h^3}\left(\frac{1}{1+m_e/m_k}\right). \tag{261a}$$

Множитель в скобках равен

$$\text{для атома H} \quad \frac{1}{1+1/1836} = \frac{1}{1{,}000545},$$

$$\text{для иона He}^+ \quad \frac{1}{1+1/7291} = \frac{1}{1{,}000137}.$$

Отсюда следует

$$R_{y,\ \mathrm{He}^+} : R_{y,\ \mathrm{H}} = 1{,}000545 : 1{,}000137 = 1{,}00041,$$

что наилучшим образом совпадает с опытом.

Первоначально написанная формула (261) справедлива, стало быть, лишь в предельном случае $m_k/m_e = \infty$; короче говоря, она дает предельное значение ридберговской частоты $R_{y,\infty}$.

Sharp, Principal
Diffuse, Fundamental

На рис. 316 в одной схеме объединены три важнейшие серии спектра атома натрия. При этом двойные линии (дублеты) показаны одиночными. Границы серий показаны штриховкой.

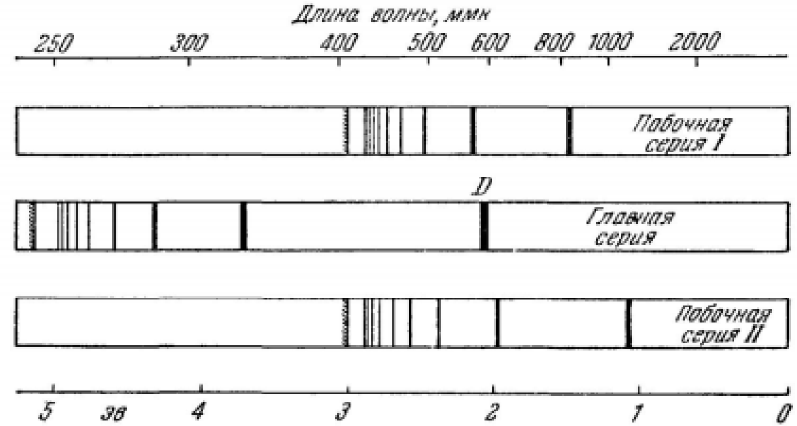


Рис. 316. Три спектральные серии атома Na.
Границы серий показаны штриховкой.

Приведем сериальные формулы, слева — в полном виде, справа — в часто употребляемом сокращенном виде, введенном Ф. Пашеном.

Главная серия

$$\nu = R_y\left(\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{(n+p)^2}\right) \quad \text{или} \quad (1s - np),$$

$$s = 0{,}629, \quad p = 0{,}144, \quad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Побочная серия *I*

$$\nu = R_y\left(\frac{1}{(2+p)^2} - \frac{1}{(n+d)^2}\right) \quad \text{или} \quad (2p - nd),$$

$$p = 0{,}144, \quad d = 0{,}070, \quad n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Побочная серия *II*

$$\nu = R_y\left(\frac{1}{(2+p)^2} - \frac{1}{(n+s)^2}\right) \quad \text{или} \quad (2p - ns),$$

$$p = 0{,}144, \quad s = 0{,}629, \quad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Серии Бергмана на рис. 316 не показаны. Первая из них описывается формулой

$$\nu = R_y\left(\frac{1}{(3+d)^2} - \frac{1}{(n+f)^2}\right) \quad \text{или} \quad (3d - nf),$$

$$d = 0{,}070, \quad f = 0{,}20, \quad n = 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

Дифракція на щілині завширшки а. Кут відхилення ~ λ/a. p=hv/c=h/λ.

$$\Delta p \approx \frac{\lambda}{a}\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{a},\ \Delta x = a,\ \ \Delta x \Delta p \approx h$$