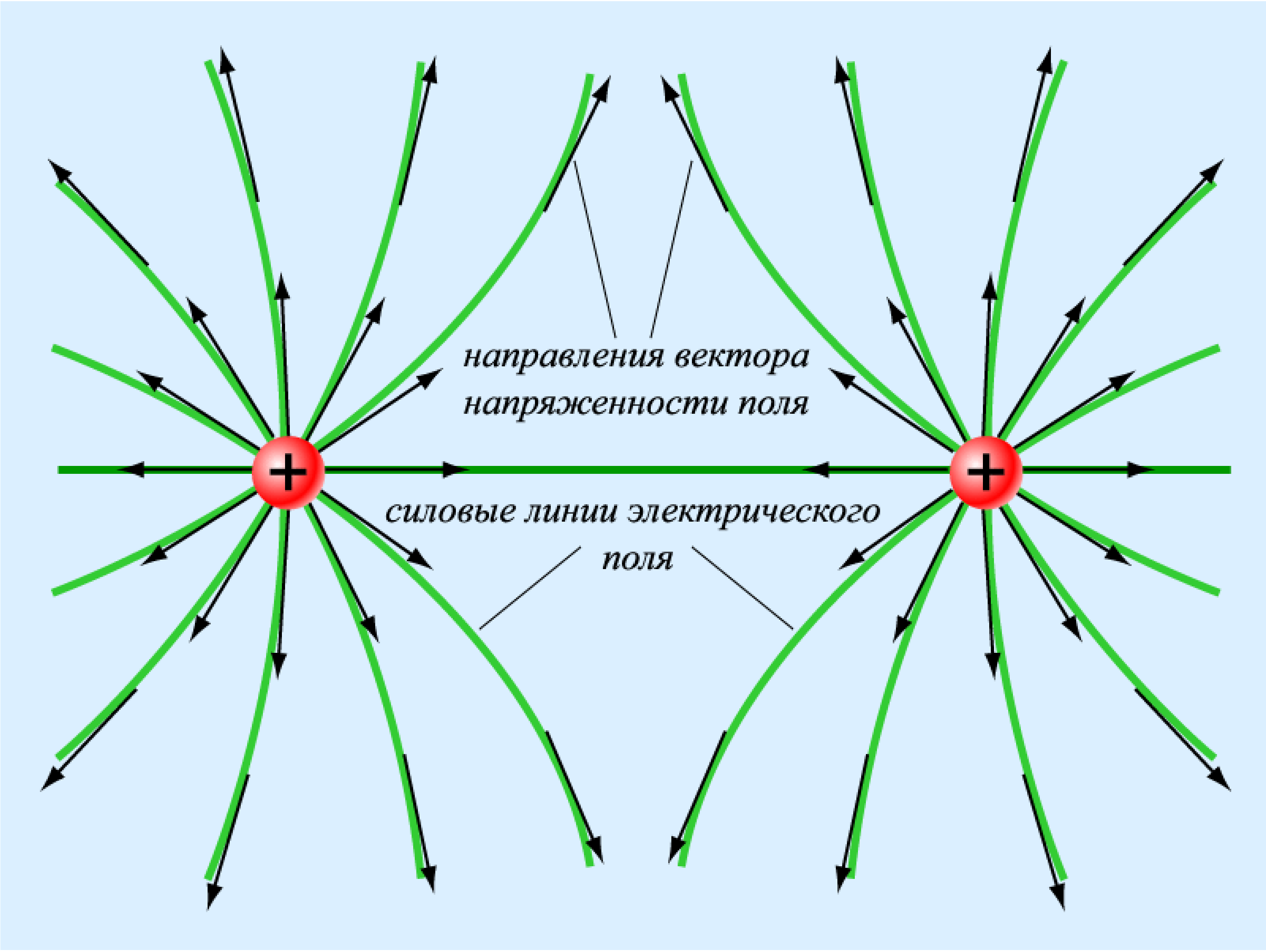
Електрика та магнетизм

Лекція 2

$$\boxed{\Phi = \oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k Q}$$

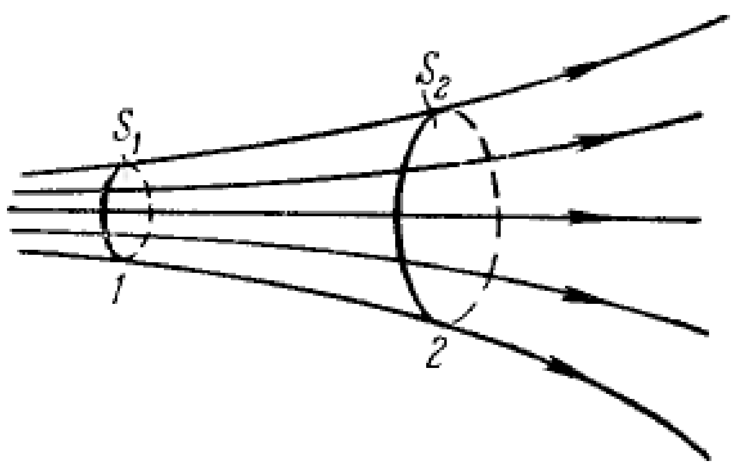
Теорема Ерншоу (Ирншоу, Samuel Earnshaw, 1842) - твердження про те, що в системі електричних зарядів, які не взаємодіють між собою через жодні інші сили, крім кулонівських, неможлива стійка рівновага у точці, де нема зарядів.

Доведемо від супротивного. Нехай маємо точку, де додатній заряд знаходиться у стійкій рівновазі. Тоді існує сила, що його повертає, тобто $F_r>0$, $E_r>0$. Оточимо точку малою сферою и знайдемо, що потік електричного поля додатній. Але згідно з теоремою Гауса він має дорівнювати нулеві.


направления вектора
напряженности поля
силовые линии электрического
поля

Если внутри поверхности нет зарядов, или если сумма зарядов равна нулю, то поток электрического поля через эту поверхность равен нулю.

Рассмотрим узкий пучок силовых линий, ограниченный поверхностью, которая также образована силовыми линиями (рис. 3). Пересечем такой пучок или, как мы будем говорить, силовую трубку двумя эквипотенциальными поверхностями *1* и *2* и определим поток поля через замкнутую поверхность, образованную боковой поверхностью силовой трубки и эквипотенциальными поверхностями *1* и *2*. Если внутри этой замкнутой поверхности нет зарядов, то общий поток через нее будет равен нулю. С другой стороны поток через боковую поверхность трубки также, очевидно, равен нулю; поэтому потоки через поверхности *1* и *2* должны быть одинаковыми. Для наглядности наш пучок силовых линий можно уподобить струе жидкости.



Обозначим напряженности поля в сечениях *1* и *2* через E_1 и E_2 и площади самих сечений через S_1 и S_2. В силу предположения об узости силовой трубки поля E_1 и E_2 можно считать постоянными вдоль каждого из сечений *1* и *2*. Поэтому мы можем записать равенство потоков через поверхности *1* и *2* в виде

$$S_1E_1 = S_2E_2$$

(так как поле перпендикулярно эквипотенциальной поверхности, то поток равен просто произведению напряженности поля на площадь поверхности). Так как число силовых линий N_1, проходящих через сечение S_1, равно числу силовых линий N_2, проходящих через сечение S_2, то можно написать

$$\frac{N_1}{S_1E_1} = \frac{N_2}{S_2E_2}.$$

Величины $n_1 = N_1/S_1$ и $n_2 = N_2/S_2$ представляют собой числа силовых линий, приходящихся на единицы площади поверхностей *1* и *2*, ортогональных силовым линиям. Мы видим, таким образом, что плотность или густота силовых линий пропорциональна напряженности поля:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Таким образом, графическое изображение поля с помощью силовых линий не только показывает направление поля, но и позволяет судить о его величине. Там, где силовые линии лежат гуще, напряженность электрического поля больше; где силовые линии разрежены, там поле слабее.

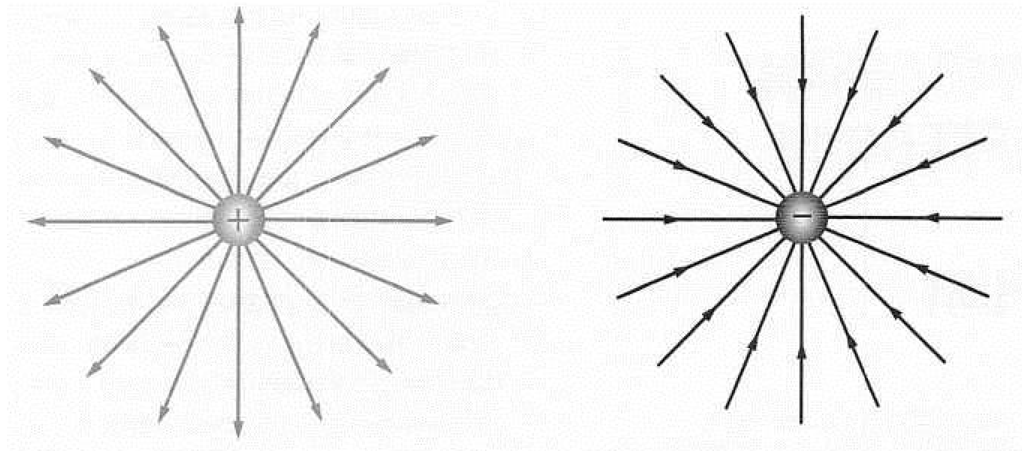
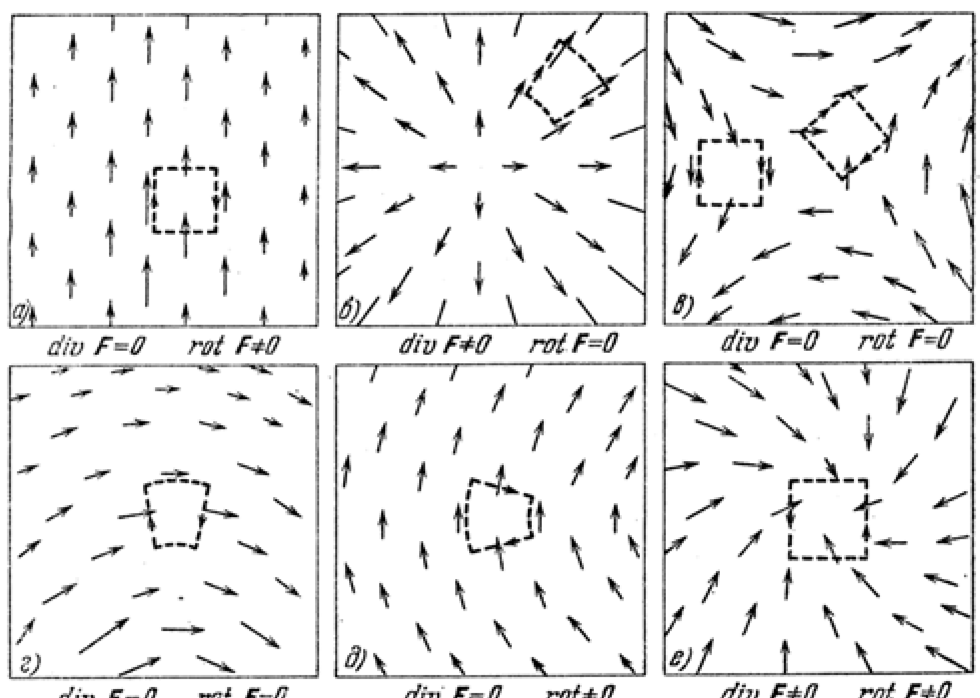
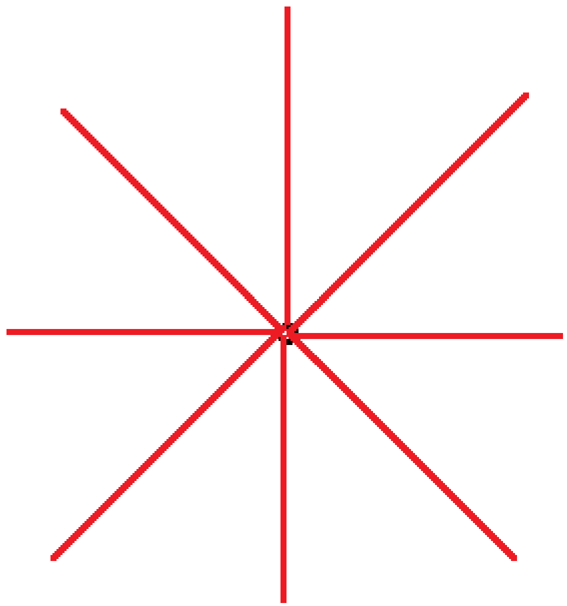
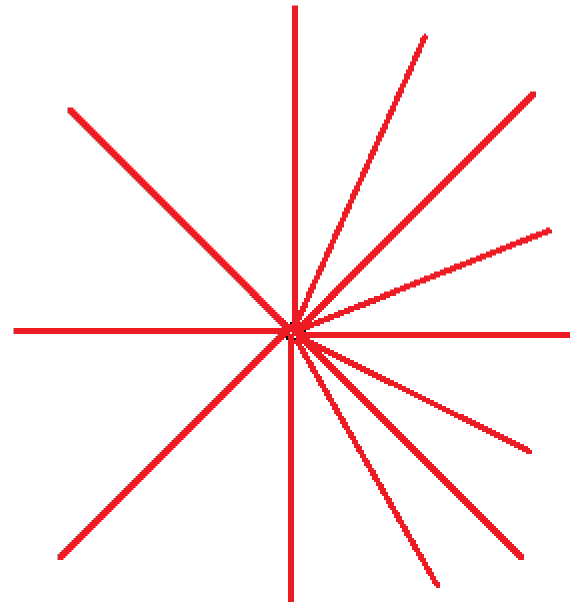


Рис. 1. Пространственная расходимость и сходимость линий электрического поля





Правильно

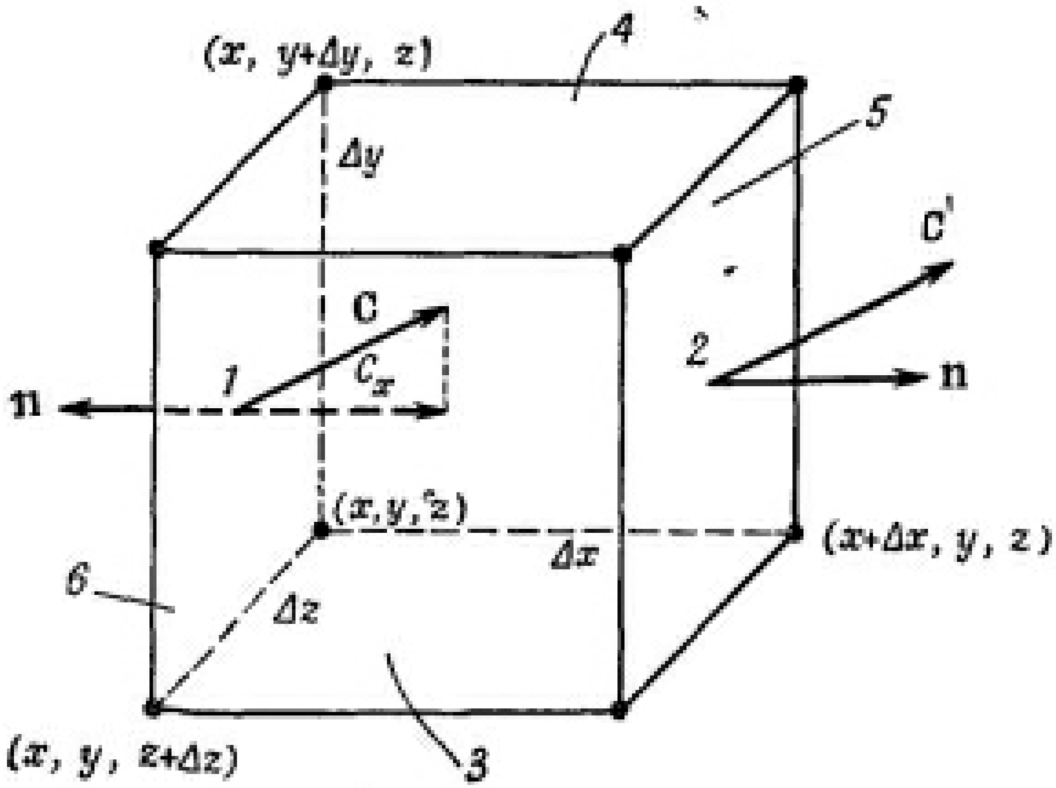


Неправильно

Векторний аналіз.

Дивергенція

$$\lim_{\substack{V \to 0 \\ (S) \to M}} \frac{\oiint\limits_{(S)} (\overline{a}, \overline{n}_0)\, dS}{V} = \operatorname{div} \overline{a}(M)$$

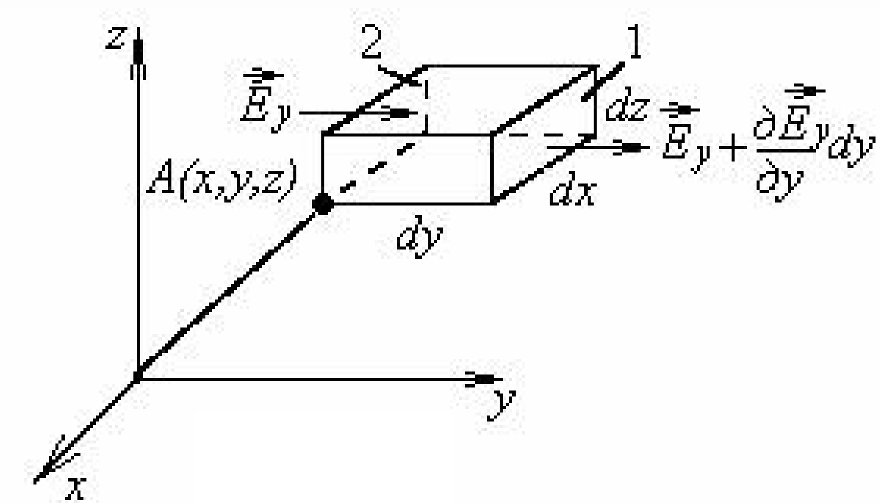


$$\Phi = \oint_S \vec{a}\, d\vec{S} = \oint_S a\, dS \cos\alpha = \oint_S a_n dS$$

$$\Phi_1 = a_y(y + dy)\, dx\, dz$$

$$\approx \left(a_y(y) + \frac{\partial a_y}{\partial y} dy \right) dx\, dz.$$

$$\Phi_2 = -a_y(y)\, dx\, dz$$



$$V = dx\, dy\, dz$$

$$\Phi = \int a_n dS + \int a_n dS + \ldots +$$

$$\Phi_1 = \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial y} dy \right) dx\, dz.$$

$$\Phi_2 = -a_y\, dx\, dz,$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\partial a_y}{\partial y} dy\, dx\, dz = \frac{\partial a_y}{\partial y} dV$$

По имеющемуся векторному полю $\vec{a}$ получается скалярное поле $div\,\vec{a}$

. В декартовой системе координат

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

В сферической системе координат

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

В цилиндрической системе координат

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Операция $div\,\vec{a}$ определена в каждой точке пространства или его части. Точки, в которых $div\,\vec{a}$ отлична от нуля, называются источниками поля. Часто при $div\,\vec{a} > 0$ говорят про истоки, а при $div\,\vec{a} < 0$ – стоки поля. Поле с $div\,\vec{a} = 0$ во всем пространстве называется соленоидальным.

Из важных формул отметим дивергенцию радиуса-вектора $\vec{r}$

$$div\,\vec{r} = 3$$

В общем случае в математике $div\,\vec{r}$ равна размерности пространства

Теорема Гаусса-Остроградского

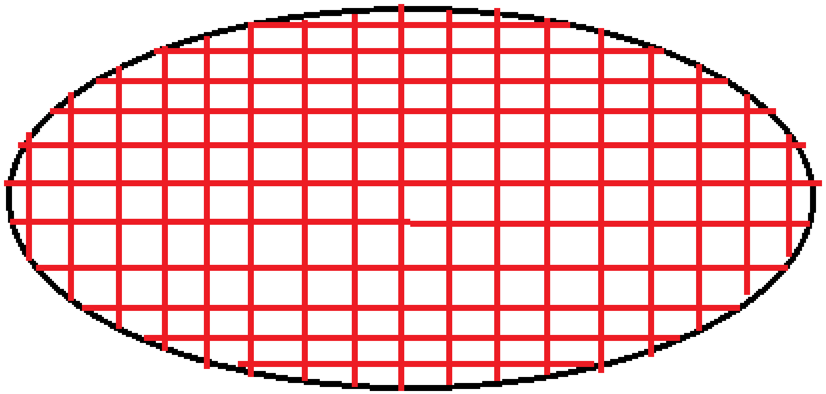
Теорема Гаусса-Остроградского в математике в случае не искривленного трехмерного пространства рассматривает замкнутую поверхность S, ограничивающую область V. Тогда

$$\oint_S \vec{a}\,d\vec{S} = \int_V div\vec{a}\,dV$$

где dV – элемент объема области V,

$d\vec{S}$ – элемент поверхности S, направленный вдоль внешней нормали к ней и по модулю равный площади элемента dS.

Для кожної частини маємо за визначенням

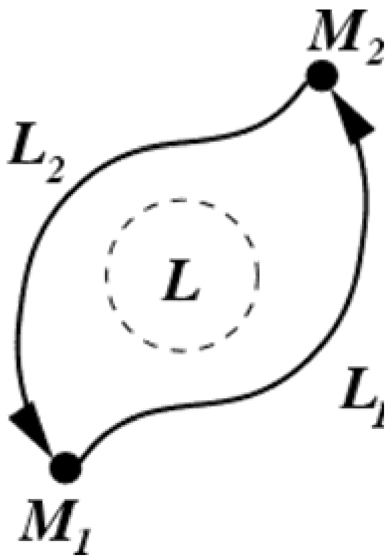


$$\Phi_i = div\vec{a}\,V_i$$

В електростатиці $div\,\vec{E} = 4\pi k\rho$

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi kQ}$$

Потенціал поля



Умова потенційності поля

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Постоянное силовое поле, т. е. поле, не зависящее от времени, обладает следующим замечательным свойством: если в таком поле материальная точка движется по замкнутому пути, так что в результате движения точка возвращается в исходное положение, то работа, совершаемая при этом силами поля, будет равна нулю.

Из этого свойства следует и другое утверждение: работа сил поля при переносе частицы из одного положения в другое не зависит от вида пути, по которому происходит перенос, а определяется только положением начальной и конечной точек переноса. Действительно, рассмотрим две точки *1* и *2* и соединим их двумя кривыми a и b (рис. 7). Предположим, что частица переводится из точки *1* в точку *2* вдоль кривой a и затем из точки *2* назад в точку *1* по кривой b. Общая работа, которая производится при этом силами поля, равна нулю. Обозначая работу буквой A, мы можем написать

$$A_{1a2} + A_{2b1} = 0.$$

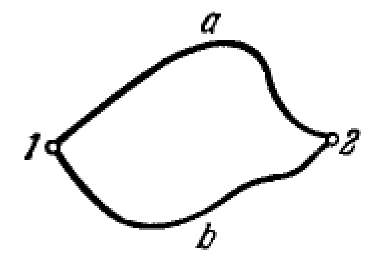


Рис. 7.

При изменении направления переноса работа, очевидно, меняет знак, поэтому из написанного равенства следует

$$A_{1a2} = -A_{2b1} = A_{1b2},$$

т. е. работа не зависит от вида кривой, соединяющей начальную и конечную точки перехода *1* и *2*.

Примем для этого какую-либо точку пространства, которую обозначим через O, за начало отсчета и будем рассматривать работу, совершаемую силами поля при переходе частицы из этой точки в какую-либо произвольную точку P. Обозначим эту работу через $-U$. Величина U, т. е. взятая с обратным знаком работа при переходе частицы из точки O в точку P, называется *потенциальной энергией* частицы в точке P. Она является функцией координат x, y, z точки P:

$$U = U(x, y, z).$$

Работа же сил поля A_{12} при переходе частицы из какой-либо произвольной точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

где U_1 и U_2 — значения потенциальной энергии в этих точках. Работа равна разности потенциальных энергий в начальной и конечной точках пути.

Сила, що діє на заряд у електричному полі пропорційна його заряду, тоді і потенціальна енергія має бути пропорціональна заряду. Позначимо $U = q\varphi$

Тоді з

$$A_{12} = \int \vec{F} d\vec{l} = q \int \vec{E} d\vec{l} = U_1 - U_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

маємо

$$\varphi - \varphi_0 = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} d\vec{l}$$

Кулонівське поле є потенційним

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

$$\varphi-\varphi_0=-\int_{P_0}^{P}\vec{E}d\vec{l}=-kQ\int_{P_0}^{P}\frac{\vec{r}d\vec{l}}{r^3}=$$

$$=-kQ\int_{P_0}^{P}\frac{rdr}{r^3}=-kQ\int_{P_0}^{P}\frac{dr}{r^2}=kQ\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

Оскільки заряд квантується, поле кожного електрона чи протона є потенційним та внаслідок принципу суперпозиції кожне електростатичне поле є потенційним.

$$\varphi=\frac{kQ}{r}+const=\frac{kQ}{r}$$

Довільне електричне поле

$$\varphi=k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}+k\int\frac{\rho dV}{r}+k\int\frac{\sigma dS}{r}$$

Напруженість поля можна знайти через потенціал, але треба застосувати іншу операцію векторного аналізу.

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Градиент grad

По имеющемуся скалярному полю ψ получается векторное поле $grad\,\psi$

В декартовой системе координат его компоненты равны

$$\left(grad\,\psi\right)_x = \frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \left(grad\,\psi\right)_y = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \left(grad\,\psi\right)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

В сферической системе координат его компоненты равны

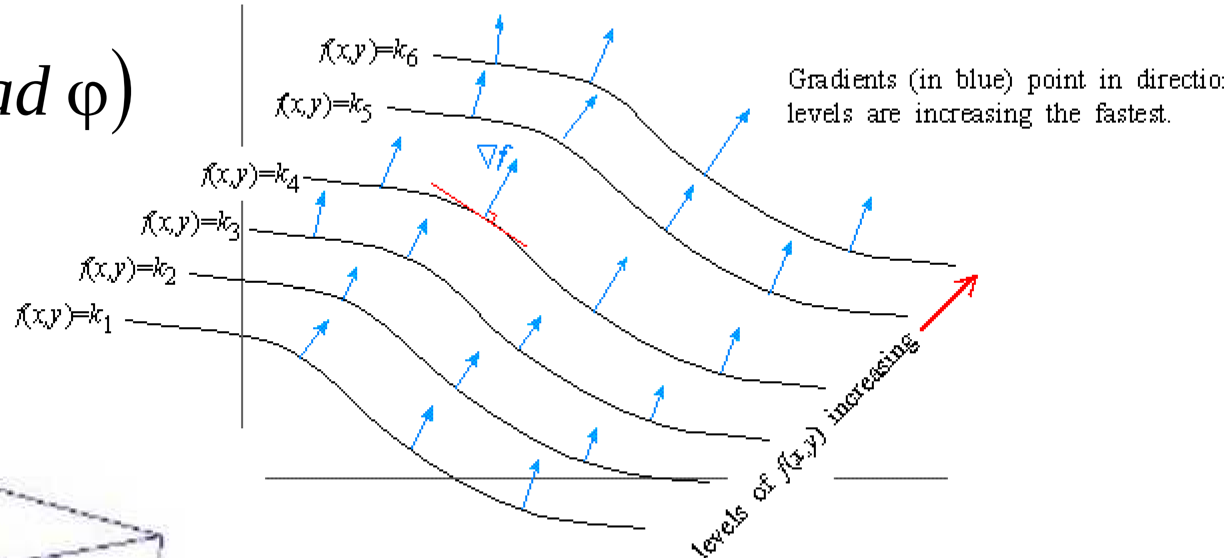
$$\left(grad\,\psi\right)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r},\quad \left(grad\,\psi\right)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad \left(grad\,\psi\right)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

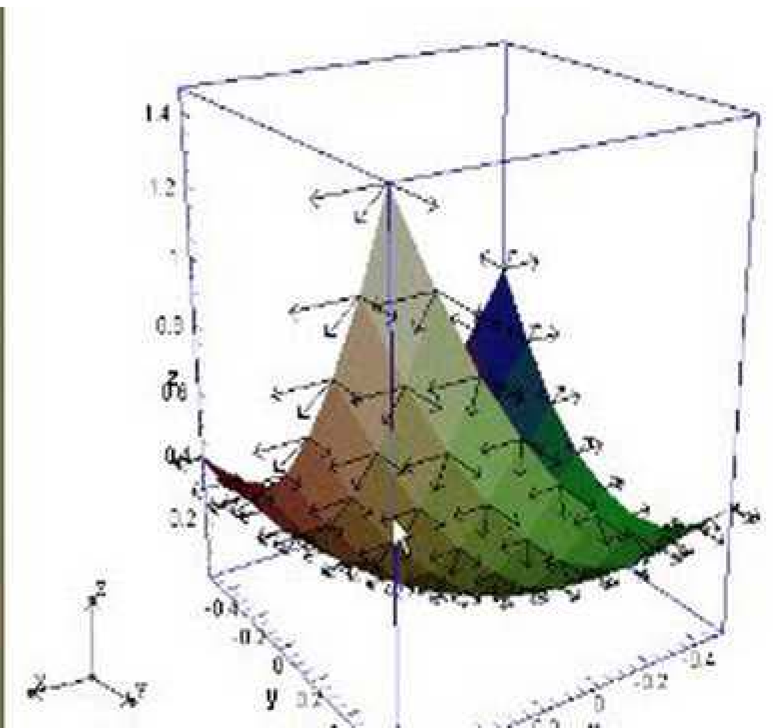
В цилиндрической системе координат его компоненты равны

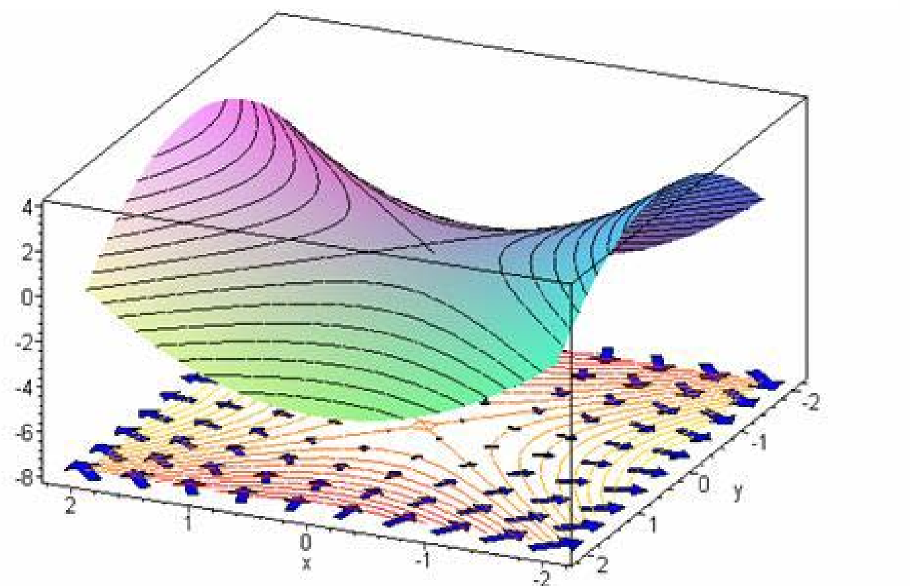
$$\left(grad\,\psi\right)_\rho = \frac{\partial\psi}{\partial\rho},\quad \left(grad\,\psi\right)_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\quad \left(grad\,\psi\right)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

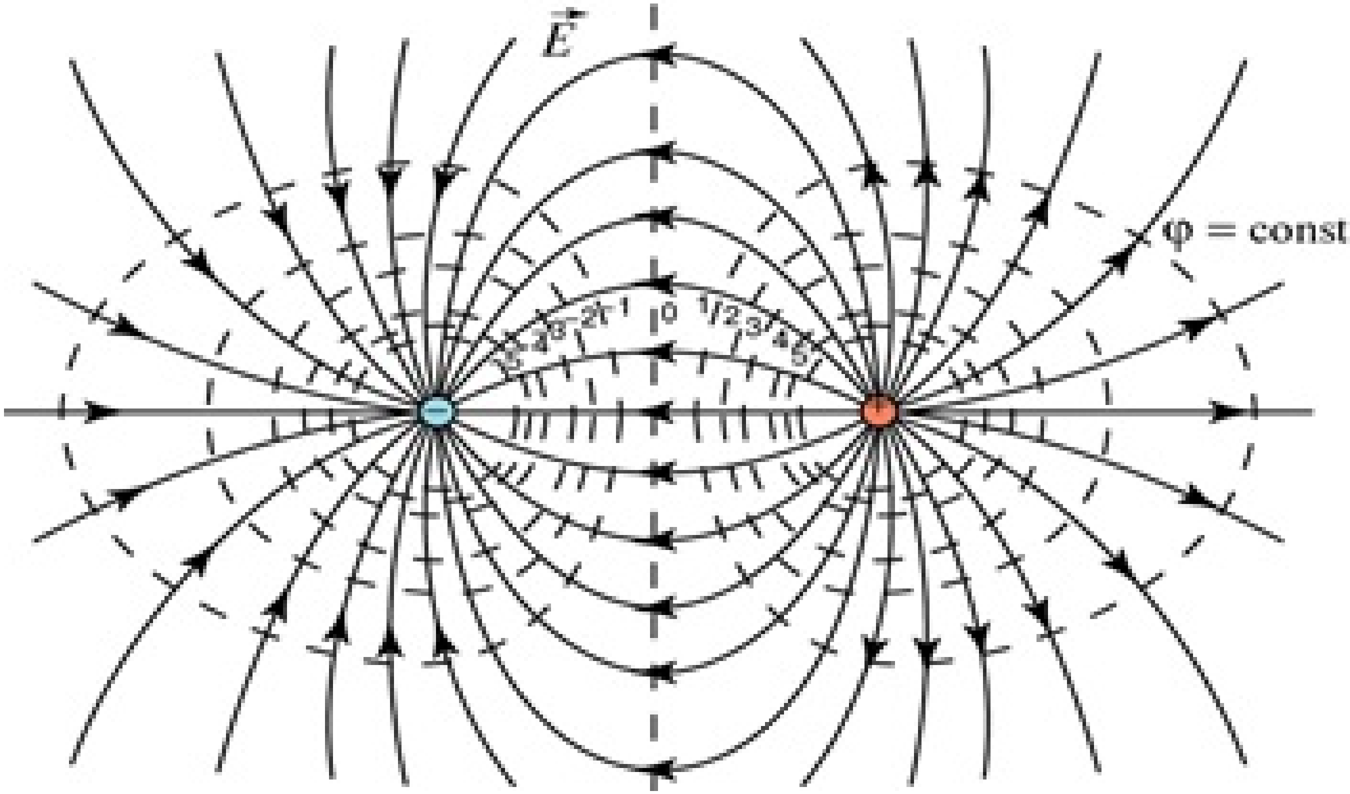
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow qE_x = -q\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = -(\vec{n}\, grad\, \varphi)$$









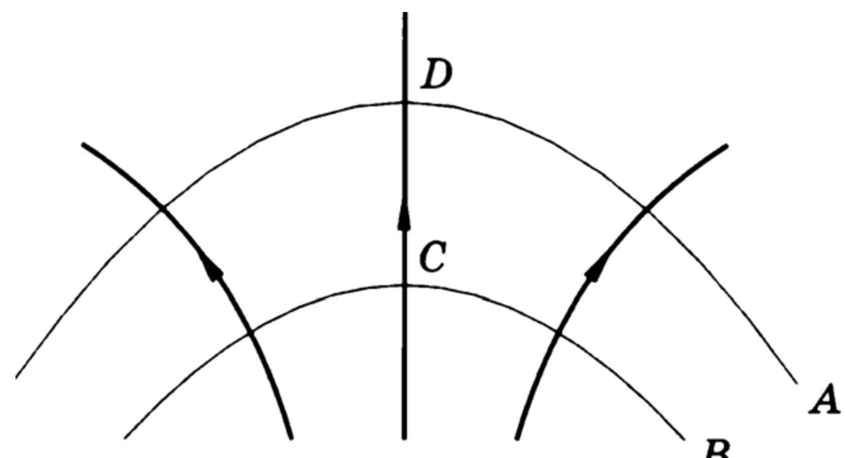


Рис. 78

$\vec{r}$

Из формулы производной от сложной функции мы получаем выражение для градиента функции

$$grad\big(\psi(\xi)\big) = \psi'\,grad\big(\xi\big), \quad \psi' = \frac{d\psi}{d\xi}$$

Из формулы производной от произведения функций мы получаем выражение для градиента произведения двух скалярных функций

$$grad\big(\varphi\psi\big) = \varphi\,grad\big(\psi\big) + \psi\,grad\big(\varphi\big)$$

Из важных формул отметим градиент r - модуля радиуса-вектора $\vec{r}$

т.е. радиальной координаты r в сферической системе координат:

$$grad\,r = \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Знайдемо потенціали полів, що розглядались на першій лекції

Нитка або циліндр $$E = \frac{2k\lambda}{r}, \; \varphi = 2k\lambda \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Площина $$E = 2\pi k\sigma, \; \varphi = -2\pi k\sigma|x| + const$$

Умова зшивання потенціалу на межі $$\varphi_1 = \varphi_2$$

якщо на границі немає подвійного електричного шару.

Подві́йний електри́чний шар (ПЕШ), (рос. двойной электрический слой (ДЭС), англ. double electric layer; нім. elektrische Doppelschicht) — тонкий шар на межі двох фаз із просторово розділених електричних зарядів протилежного знаку. Оскільки просторовий розподіл зарядів завжди супроводжується виникненням електричної різниці потенціалів, ПЕШ можна розглядати, як своєрідний мікроконденсатор, відстань між обкладинками якого визначається молекулярними розмірами.

Всередині r<R

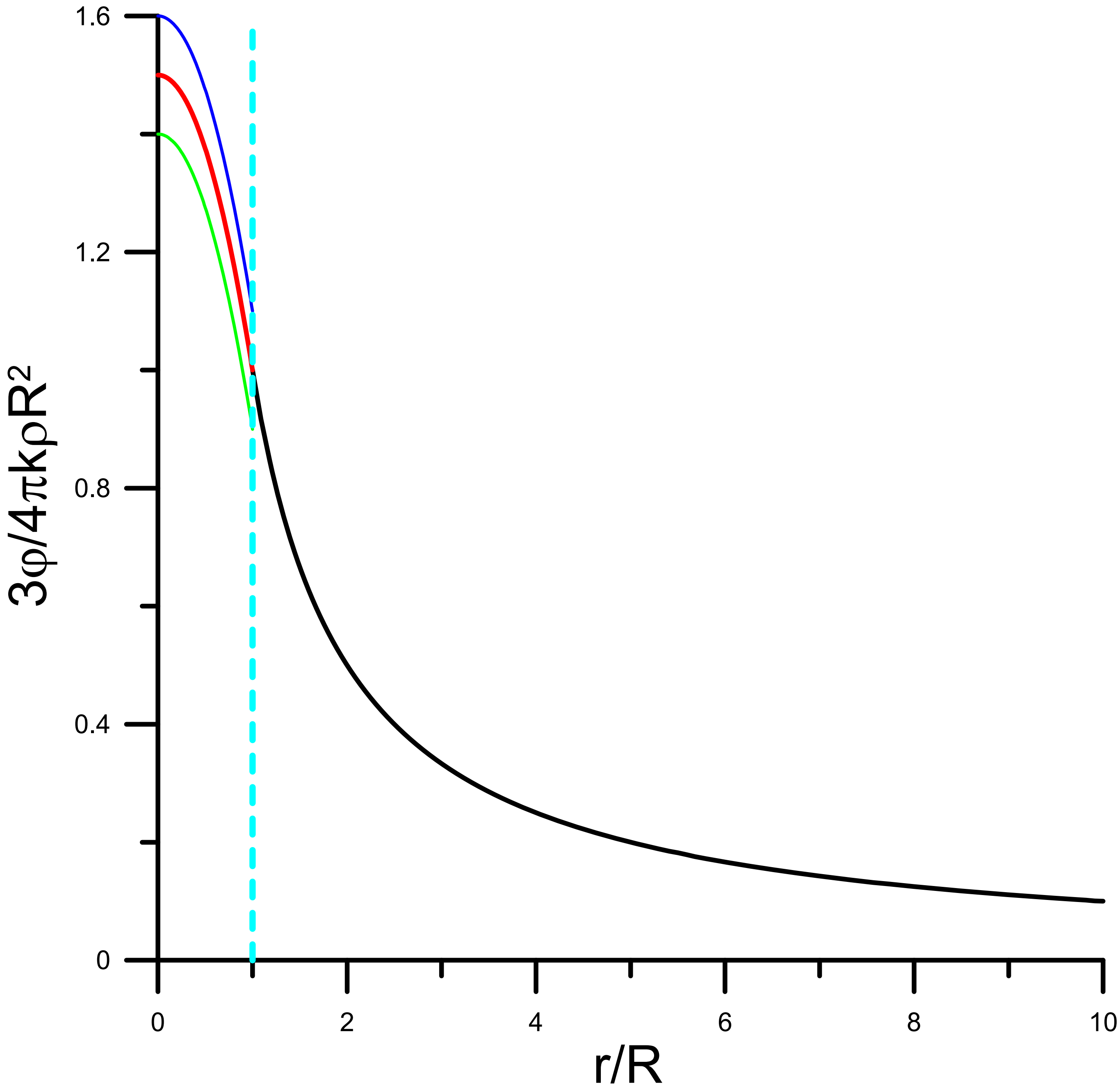
$$E = \frac{4\pi}{3} k\rho r, \quad \varphi_1 = const - \frac{2\pi}{3} k\rho r^2$$

Ззовні r>R

$$\varphi_2 = \frac{kQ}{r} = \frac{4\pi k\rho R^3}{3r}$$

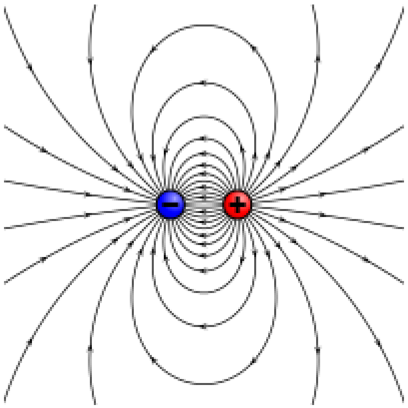
Умова зшивання потенціалу на межі $\varphi_1 = \varphi_2$

при $r = R$ дає $const = 2\pi k\rho R^2$


1.6
1.2
0.8
0.4
0
0
2
4
6
8
10
$3\varphi/4\pi k\rho R^2$
r/R

Електричний диполь

Електричний дипольний момент це вектор, що дорівнює



$$\vec{d} = \sum_{i=1} q_i \vec{r}_i + \int_V \rho \vec{r} dV + \int_S \sigma \vec{r} dS$$

Для системи точкових зарядів маємо $\vec{d} = \sum_{i=1} q_i \vec{r}_i$

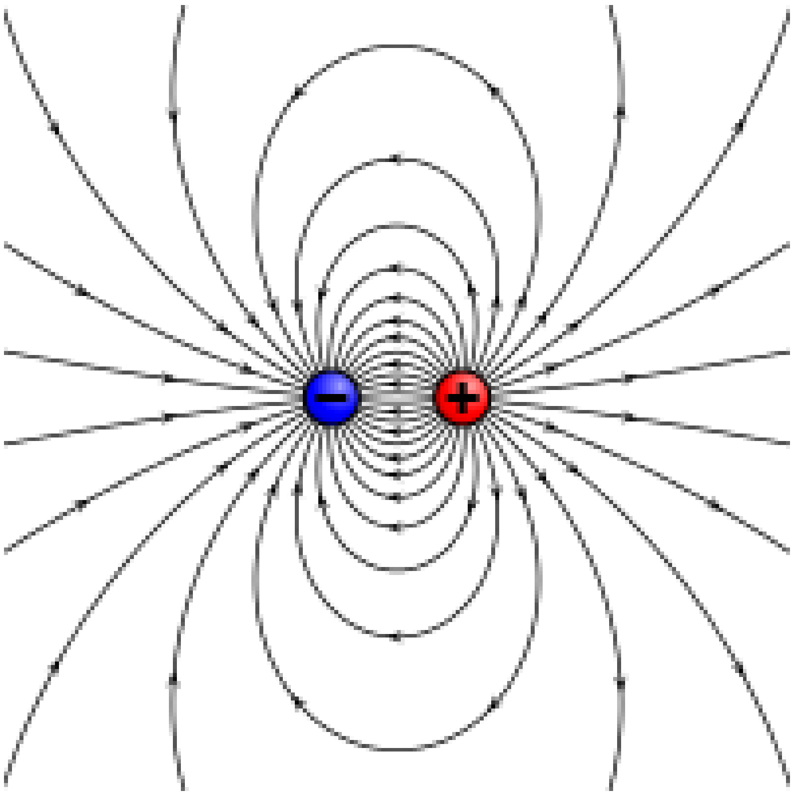
Зсунемо початок координат $\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{a}$ тоді

$$\vec{d}\,' = \sum_{i=1} q_i \vec{r}_i{}' = \vec{d} + \sum_{i=1} q_i \vec{a}$$ При $\sum_{i=1} q_i = 0$ маємо $\vec{d}\,' = \vec{d}$

При $\sum_{i=1} q_i \neq 0$ та $\vec{a} = -\vec{d} \Big/ \sum_{i=1} q_i$ маємо $\vec{d}\,' = 0$

Простіший фізичний диполь складається з двох точкових зарядів q та –q на відстані l, вектор, проведений від від'ємного заряду до додатного є

$$\vec{l} \Rightarrow \vec{d} = q\vec{l}$$



Математичний диполь є межею при

$$\vec{d} = q\vec{l} = const$$

$$\vec{l} \to 0,\ q \to \infty$$

Для такого диполя кожна відстань є набагато більша за розміри диполя l