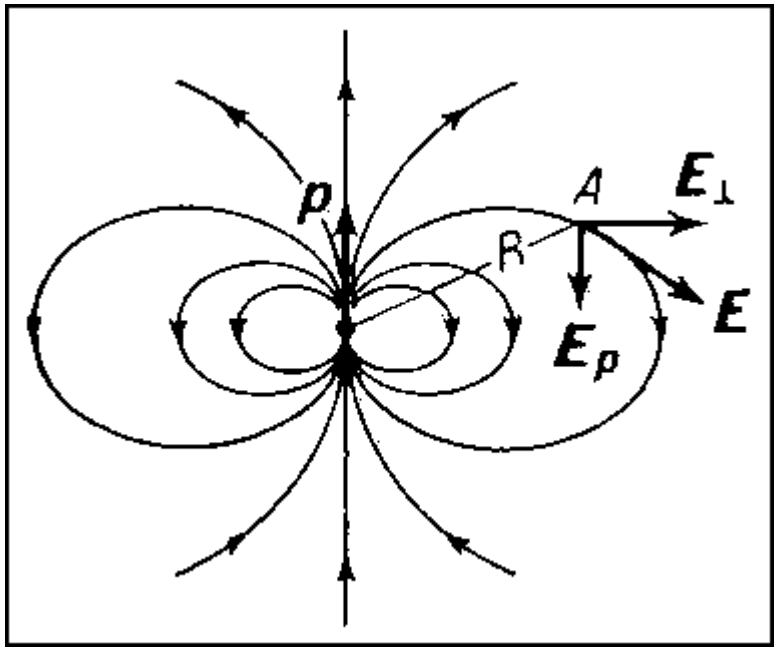
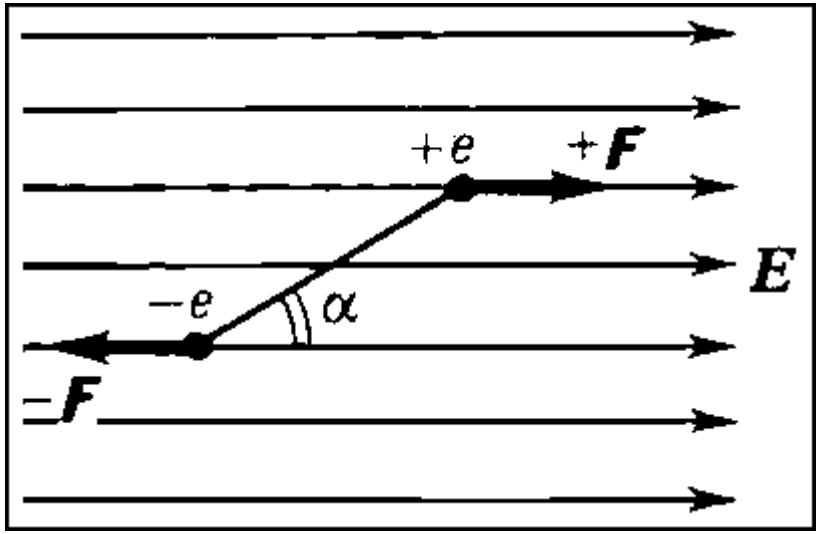
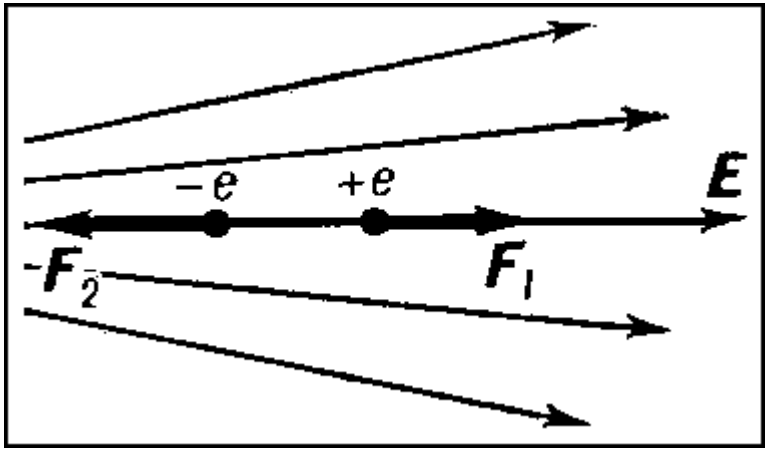
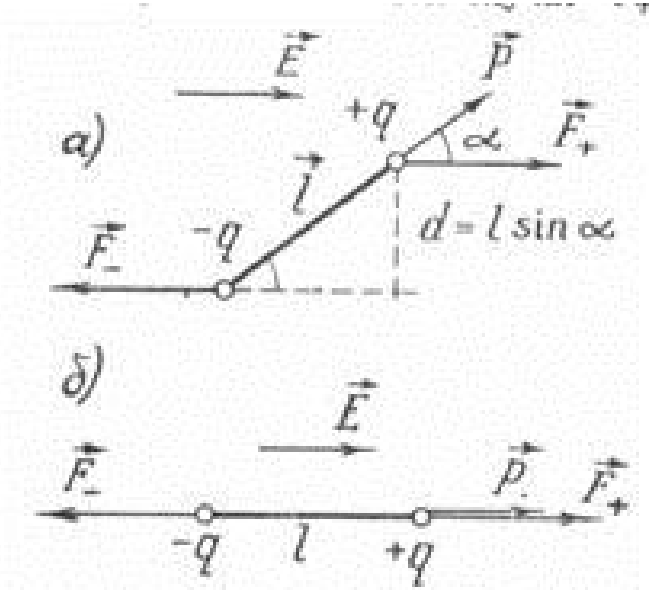
Електрика та магнетизм

Лекція 3.
Поле диполя. Мультиполі. Ротор.

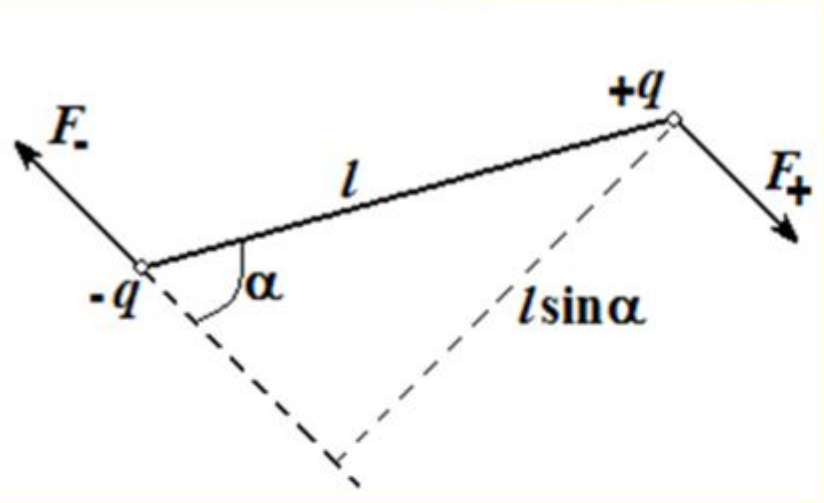

p
A
E⊥
R
E
Ep


+e
+F
E
−e
α
−F


−e
+e
E
−F2
F1


a)
E
p
+q
α
F+
l
−q
d = l sin α
F−
б)
E
F−
p
F+
−q
l
+q

Диполь во внешнем поле



$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} \quad и \quad \mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$$

$$M = qE \cdot l \sin\alpha = pE \sin\alpha$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]$$

Электрическое поле стремится повернуть ось диполя так, чтобы его электрический момент p установился по направлению поля. Положение равновесия, когда векторы p и E параллельны, устойчиво.

Энергия диполя во внешнем поле

$$W = q_+\varphi_+ - q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial\varphi}{\partial l} l;$$

$$\partial\varphi/\partial l = -E_l$$

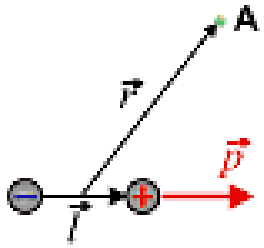
$$\varphi_+ - \varphi_- = -E_l l$$

$$W = -\mathbf{pE}$$

MyShared

Поле диполя

Электрический диполь система двух разноименных равных по модулю точечных заряда



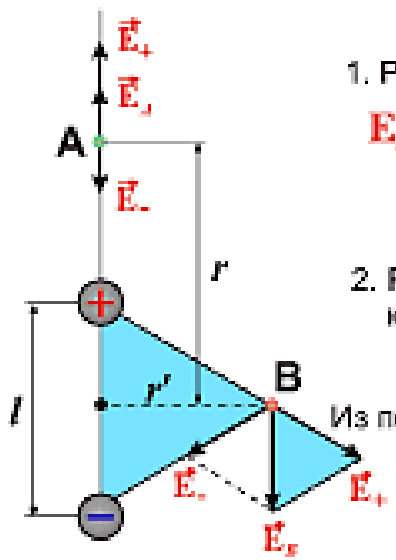
(как самостоятельный объект рассматривается в случаях, когда плечо диполя l намного меньше расстояния r до точки А, в которой рассчитывается его электрическое поле)

Основная характеристика диполя
- электрический (дипольный) момент

$$\vec{p}=|Q|\vec{l}$$

В соответствии с принципом суперпозиции:

$$\vec{E}=\vec{E}_+ + \vec{E}_-$$



1. Расчет поля на оси диполя (точка А):

$$E_A=E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{Q}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$$E_A \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p}{r^3}$$ т.к. $l << r$

2. Расчет поля на перпендикуляре к оси диполя (точка В):

$$E_+=E_- \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{(r')^2}$$

Из подобия выделенных треугольников:

$$\frac{E_B}{E_+}=\frac{l}{\sqrt{(r')^2+(\frac{l}{2})^2}}=\frac{l}{r'}$$

$$E_B=E_+\frac{l}{r'}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0(r')^3}$$

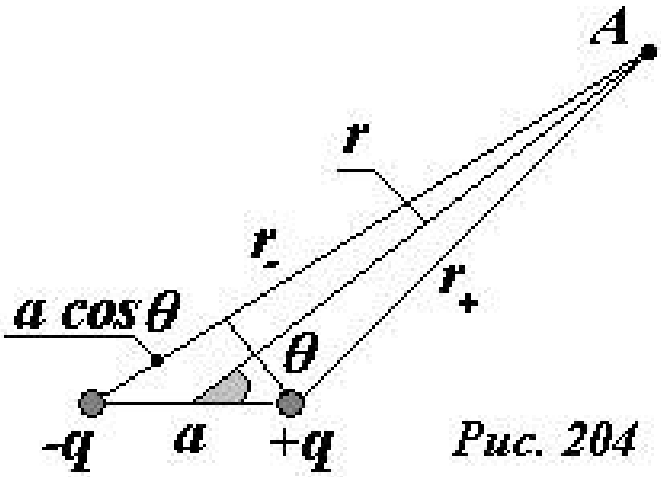


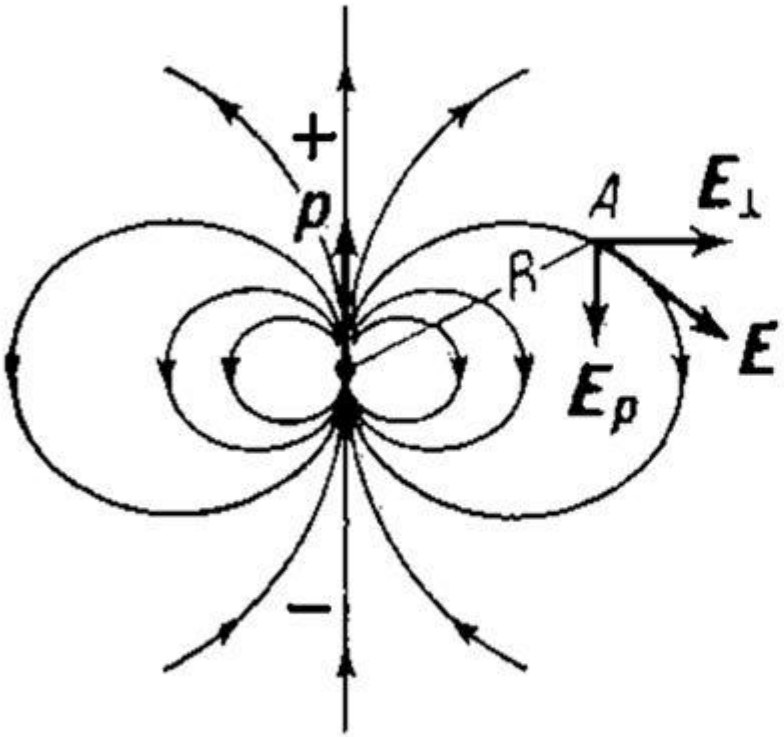
Рис. 204

$$\varphi_A = \varphi_{A+} + \varphi_{A-} = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r_-} =$$

$$= \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_- - r_+}{r_+\cdot r_-} = \frac{|q|l\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{P\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

РНТО Росучприбор Южно-Уральский государственный университет

Напряжённость и потенциал электрического поля диполя



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}}{r^2}$$

$$\vec{E}_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{II} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{2\vec{p}}{r^3}$$

Напряжённость электрического поля в точке A на расстоянии R (R>>l) разделена на 2 компонента: E_p – параллельно диполю и $E_{\perp}$ - перпендикулярно диполю. Общий вектор направлен по касательной

MyShared

$$\boxed{\varphi = k\frac{\left(\vec{d}\vec{r}\right)}{r^3}}$$

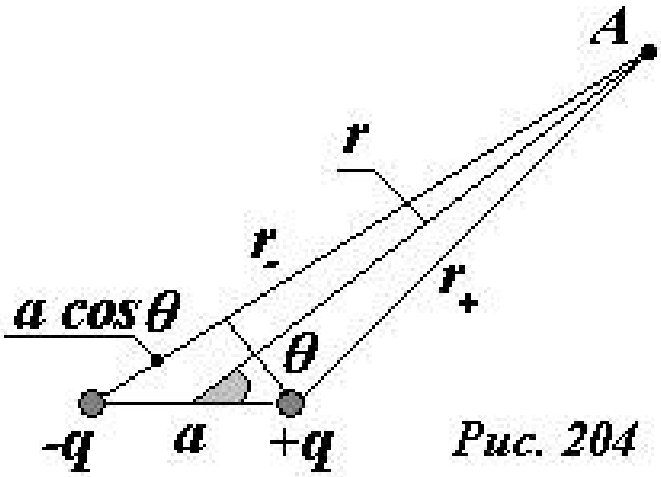


Рис. 204

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = \frac{kq}{r_+ r_-}\left(r_- - r_+\right)$$

$$\approx \frac{kq}{r^2} a\cos\theta = \frac{kd\cos\theta}{r^2} = k\frac{\left(\vec{d}\vec{r}\right)}{r^3}$$

$$\vec{E} = -grad\,\varphi$$

$$(grad\,\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (grad\,\psi)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad (grad\,\psi)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

$$E_r = 2kd\,\frac{\cos\theta}{r^3}, E_\theta = kd\,\frac{\sin\theta}{r^3}, E = \left|\vec{E}\right| = kd\,\frac{\sqrt{3\cos^2\theta + 1}}{r^3}$$

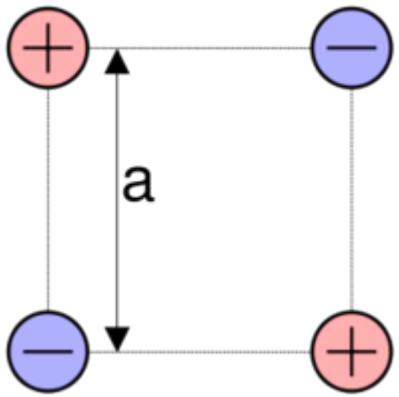
$$E_z = kd\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}, E_x = kd\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

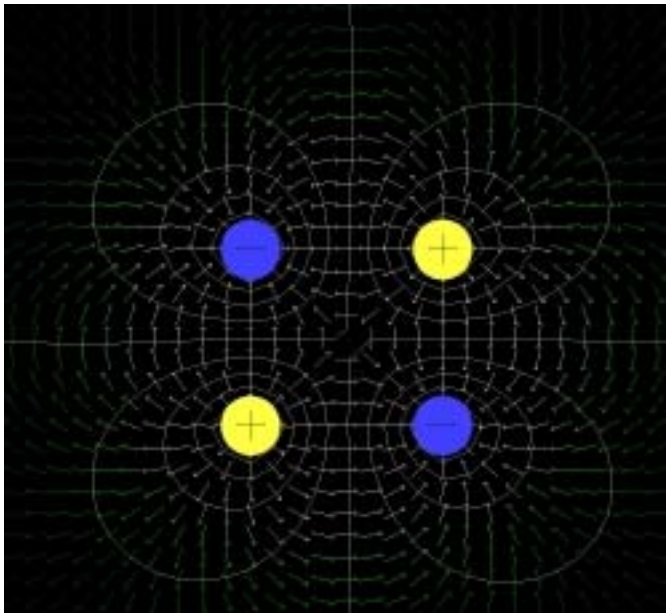
$$\varphi = \frac{kd\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{E} = k\,\frac{3(\vec{n}\vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{r^3} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\varphi = k\,\frac{\left(\vec{d}\vec{r}\right)}{r^3}$$

$$U = -(\vec{d}_2\vec{E}) = -k\,\frac{3(\vec{n}\vec{d}_1)(\vec{n}\vec{d}_2) - (\vec{d}_1\vec{d}_2)}{r^3}$$





$$d_{\alpha\beta} = \sum_i e_i \cdot (3x_{i\alpha}x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta})$$

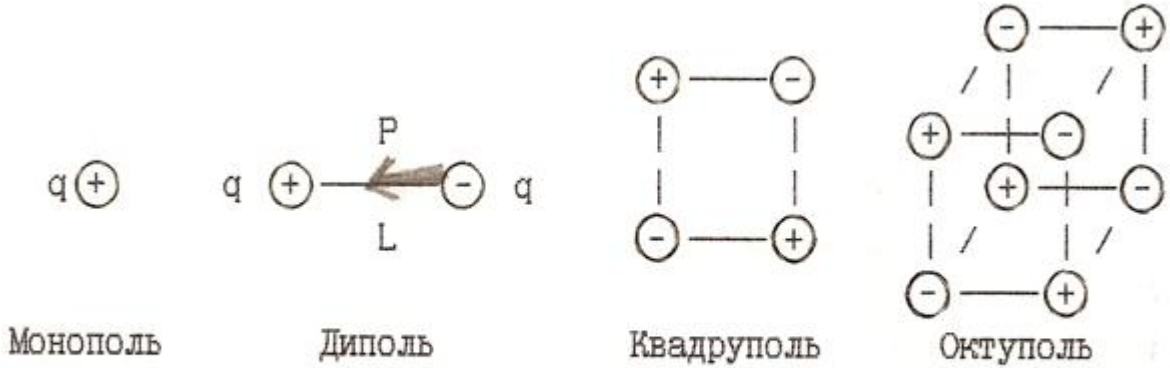
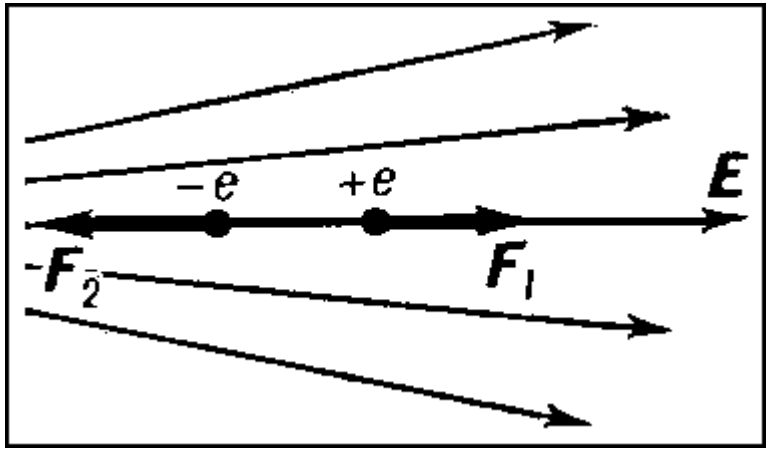
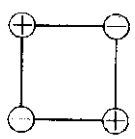
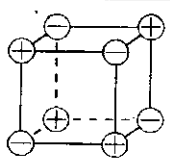


Рис. 2. Вид мультиполей различных порядков.



$$F = eE(x+l) - eE(x) \approx el\frac{\partial E}{\partial x} = d\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$F \sim r^{-n}$$

Система зарядов (мультиполь)	Модель	Зависимость φ и *E* от направления	Зависимость от расстояния	
			φ	*E*
Точечный заряд	○ (±)	Не зависят	r^{-1}	r^{-2}
Диполь	⊕ ← ⊖	Зависят	r^{-2}	r^{-3}
Квадруполь		Зависят	r^{-3}	r^{-4}
Октуполь		Зависят	r^{-4}	r^{-5}

	n
qq	2
dq	3
dd	4
qQ	4
dQ	5
QQ	6
qO	5
dO	6
QO	7

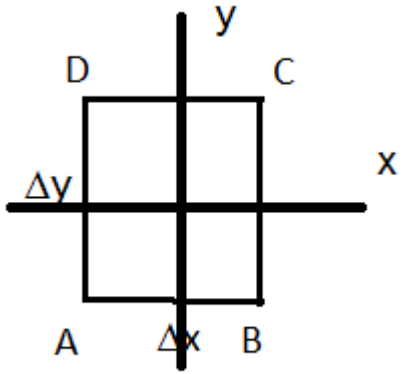
Наведений диполь d~E

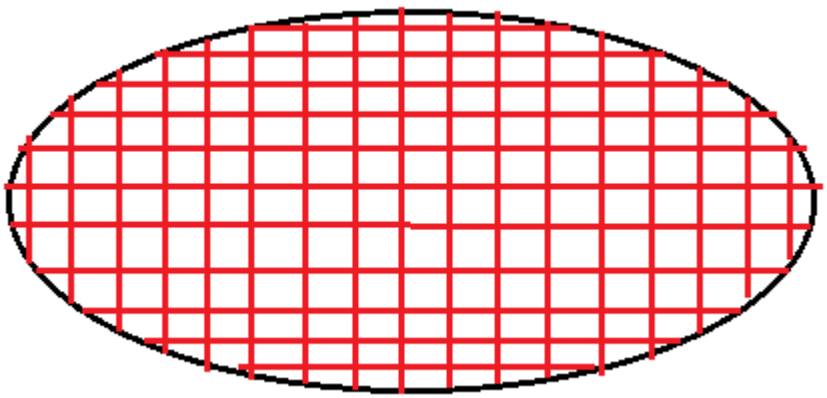
	n
OO	8
16q	6
q цеглина	5
d цеглина	7
Q цеглина	9
O цеглина	11
16 цеглина	6

Ротор поля rot, curl

$$C = \oint_L (\vec{a} d\vec{l}) = \oint_L a_n dl$$

$$dC = rot\, \vec{a}\, d\vec{S} = rot_n\, \vec{a}\, dS$$





$$C = \int_A^B a_x dx + \int_B^C a_y dy + \int_C^D a_x dx + \int_D^A a_y dy =$$

$$= a_x^{(1)} \Delta x + a_y^{(2)} \Delta y - a_x^{(3)} \Delta x - a_y^{(4)} \Delta y$$

$$a_x^{(3)} = a_x^{(1)} + \frac{\partial a_x}{\partial y} \Delta y, a_y^{(2)} = a_y^{(4)} + \frac{\partial a_y}{\partial x} \Delta x$$

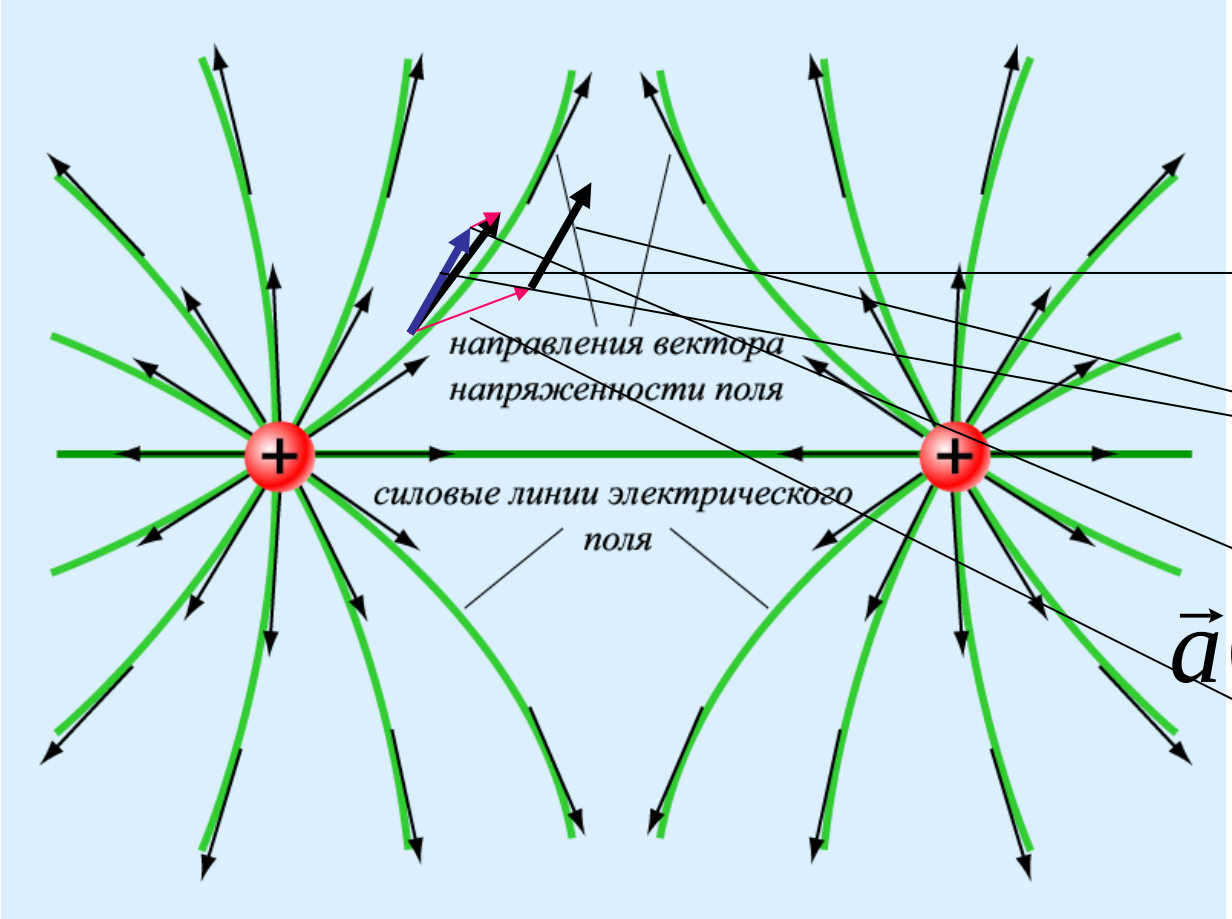
$$C = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = rot_z \vec{a} \Delta x \Delta y$$

$$dC_i = \oint_{dL_i} (\vec{a} d\vec{l})$$

$$dC_i = rot\, \vec{a}\, d\vec{S}_i$$

$$\boxed{\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S rot\, \vec{a}\, d\vec{S}}$$

У цьому місті треба переключитись на методичний посібник “Дополнительные материалы по курсу электричества и магнетизма” та прочитати від **Ротор rot** до **Теоремы Гаусса-Остроград-ского, Стокса и Грина.**



$$\vec{a}(\vec{r})$$

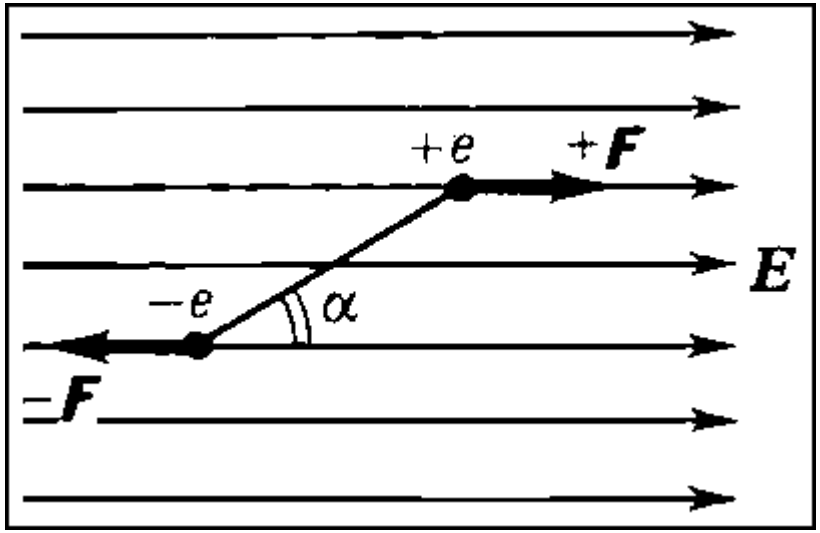
$$\vec{a}(\vec{r}+\varepsilon\vec{b})$$

$$\vec{a}(\vec{r}+\varepsilon\vec{b})-\vec{a}(\vec{r})$$

$$\varepsilon\vec{b}$$

$$(\vec{b}\nabla)\vec{a}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\vec{a}(\vec{r}+\varepsilon\vec{b})-\vec{a}(\vec{r})}{\varepsilon}$$

Сила, що діє на диполь, якій не є орієнтованим вздовж поля



$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- =$$

$$= e\Big(\vec{E}(x + l_x, y + l_y, z + l_z) -$$

$$- \vec{E}(x, y, z)\Big) \approx$$

$$\approx e\left(\vec{E}(x, y, z) + l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} - \vec{E}(x, y, z)\right) =$$

$$= d_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + d_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + d_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \left(\vec{d}\nabla\right)\vec{E}$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F},$$
$$\Delta f = \nabla^2 f,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}.$$

Ирландская юбилейная монета 10 евро.
К 200-летию со дня рождения ирландского физика, астронома и математика У. Р. Гамильтона.