

# Електрика та магнетизм

Лекція 5



Вогні святого  
Ельма (англ. Saint  
Elmo's fire, Saint  
Elmo's light)

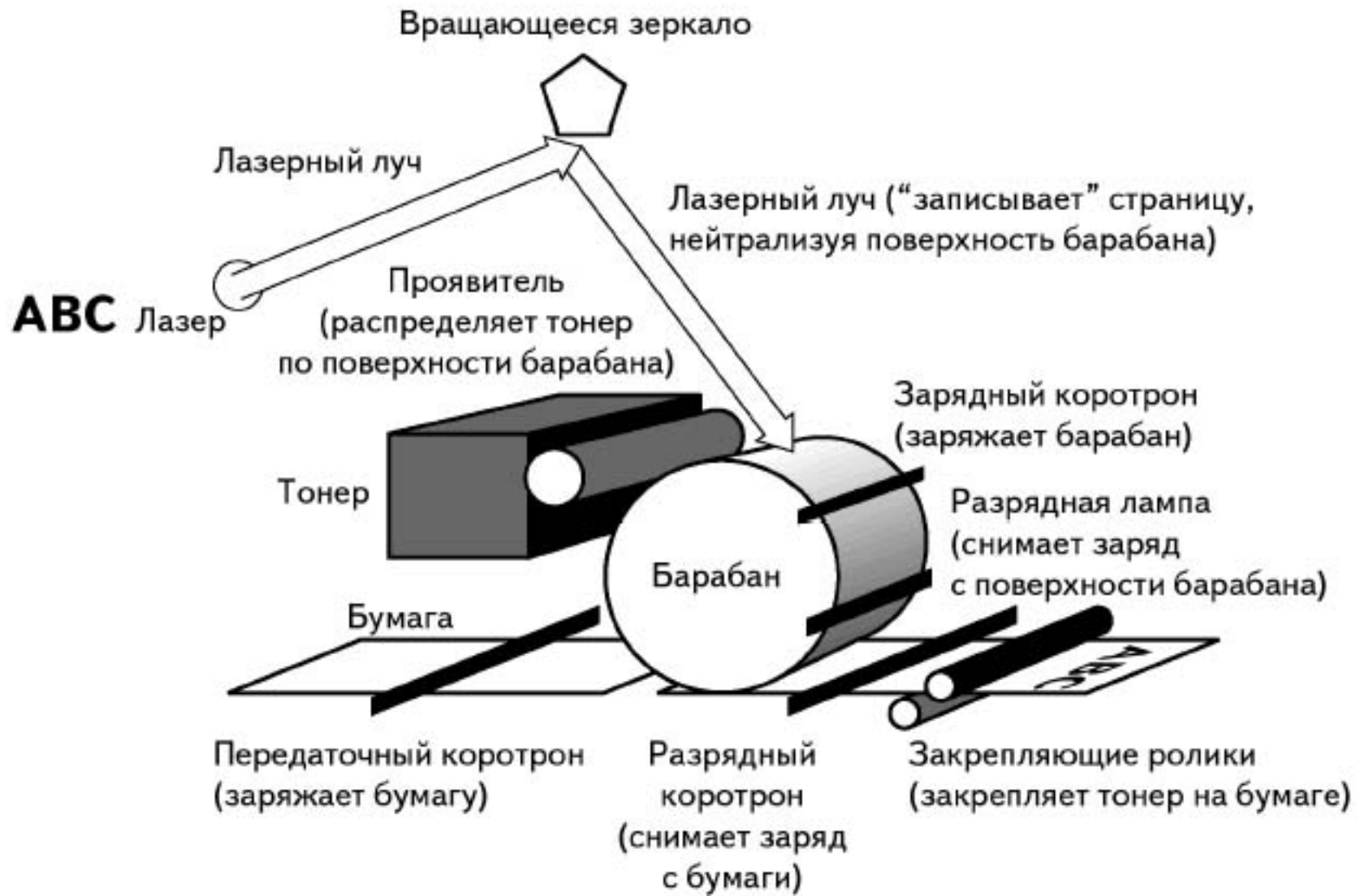




Богдан Войцеховский  
демонстрирует эффект  
образования огней святого  
Эльма в своей лаборатории

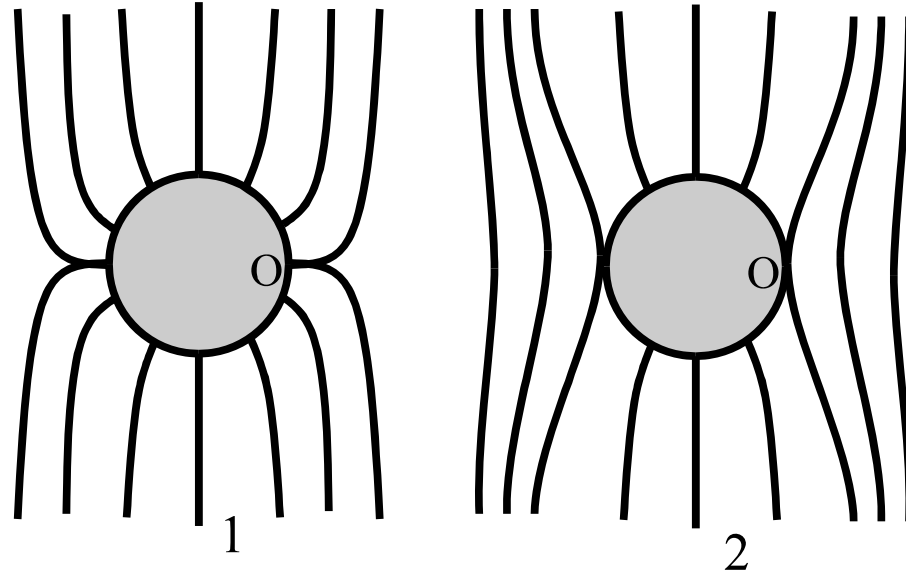






## Особые точки электростатического поля на примере задачи про шар в однородном поле

Убедимся в существовании подобных точек на примере одной задачи.



**Условие задачи:** Рассмотрим однородное электростатическое поле, в которое помещен металлический шар. Если выбрать «ось» шара в направлении поля, то на «экваторе» шара выбираем точку  $O$ . Естественно, что из-за аксиальной симметрии задачи все точки на «экваторе» эквивалентны и т.  $O$  является их типичным представителем. Нарисуем теперь картину силовых линий поля и поинтересуемся линией (или линиями), проходящей через т.  $O$ . Некто, зная, что силовые линии всегда перпендикулярны поверхности проводника, рисует картину, изображенную на рис. 1. Его оппонент против рис. 1 из-за того, что силовая линия имеет угол в т.  $O$ , а в школе учат, что силовая линия не может иметь изломов. Он предлагает вариант, изображенный на рис. 2. Но на нем силовые линии не перпендикулярны поверхности проводника. Кто из них прав? Или неправы оба? Перед тем, как нарисовать искомую картинку, надо узнать, какой угол составляет силовая линия поля, проходящая через т.  $O$ , с поверхностью проводника.

**Решение задачи:** Введем в плоскости центрального сечения шара две системы координат – декартову  $(x, y)$  с центром в центре шара (ось  $y$  направлена вдоль направления поля, ось  $x$  проходит через точку  $O$ ) и полярную  $(r, \theta)$  с центром в центре шара (угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $y$ ,  $r^2=x^2+y^2$ ). Обозначим радиус шара  $R$ . Вне шара потенциал поля будет суммой потенциала однородного поля  $\varphi_1 = -Ey = -Er \cos \theta$

и поля диполя, находящегося в центре шара и имеющего дипольный момент  $\vec{d} = \vec{E}R^3$ , то есть

$$\varphi_2 = \frac{ER^3 \cos \theta}{r^2} \quad (\text{здесь и далее используется система СГС}):$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = E \cos \theta r \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) = Ey \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right)$$

Вывод этой формулы можно найти в любом приличном задачнике. Однако он и не нужен. Решение удовлетворяет уравнению Лапласа вне шара ( $r > R$ ), имеет на большом расстоянии от него нужную асимптотику  $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varphi_1$  и удовлетворяет граничному условию  $\varphi = 0$  на поверхности шара. Поэтому, благодаря теореме об единственности решения задач электростатики, это решение будет единственно верным. Собственно говоря, значение

$$\vec{d} = \vec{E}R^3$$

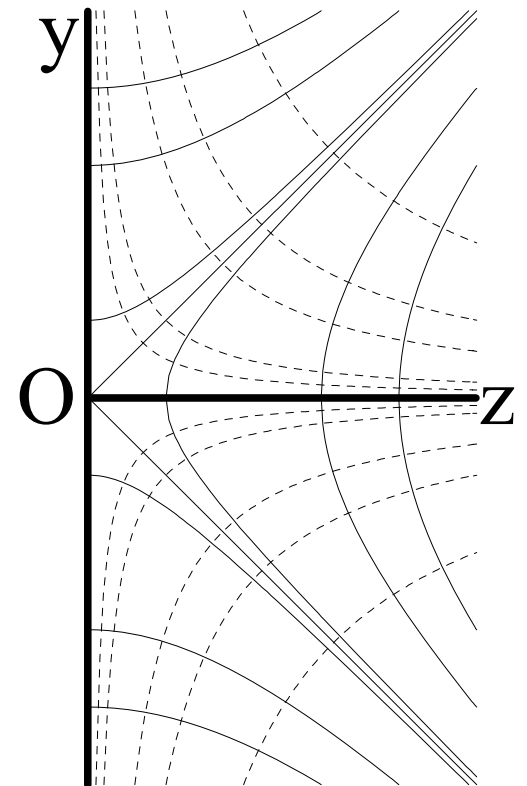
является единственным, при котором потенциал зануляется на поверхности шара.

Заметим, что точка  $O$  лежит на пересечении двух взаимно перпендикулярных эквипотенциальных поверхностей – поверхности шара и плоскости  $y=0$ .

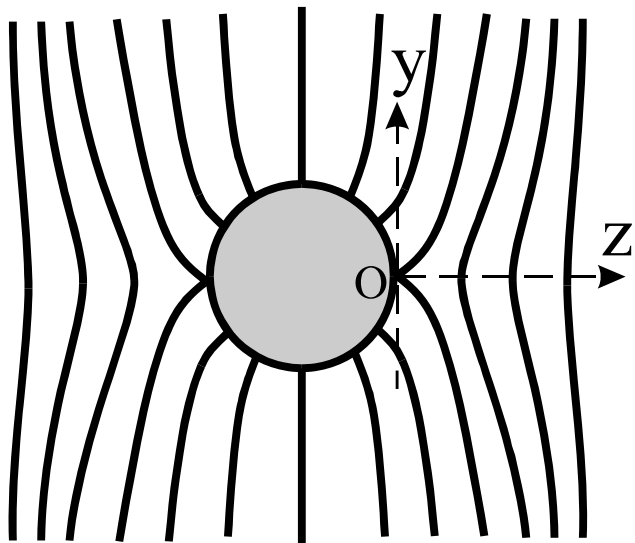
Рассмотрим поведение решения вблизи т.  $O$ . Для этого введем новую декартовую систему координат  $(z, y)$  с началом в этой точке. Координата  $y$  совпадает с аналогичной координатой системы  $(x, y)$ , а координата  $z$  получается из координаты  $x$  сдвигом  $z=x-R$ . При малых  $y, z$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= -E \cos \varphi \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) = -E \left( y - \frac{yR^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = \\ &= -Ey \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2z}{R} + \frac{z^2 + y^2}{R^2} \right)^{-3/2} \right] \approx -Ey \left[ 1 - \left( 1 - \frac{3z}{R} \right) \right] = -\frac{3E}{R} yz. \end{aligned}$$

Вблизи точки  $O$  эквипотенциальными поверхностями являются оси  $y$  и  $z$ , а также семейство гипербол  $yz = \text{const}$ . На рисунке справа, представляющем картину поля в малой окрестности т.  $O$ , они нарисованы штрихованными гиперболами. Силовые линии поля ортогональны эквипотенциальным поверхностям. На рисунке они обозначены сплошными линиями. Некоторые из них являются гиперболами, ортогональными поверхности шара  $z=0$ , некоторые — гиперболами, не касающимися шара. Кроме гипербол, силовыми линиями будут две прямые, начинающиеся в точке  $O$  и образующие угол  $45^\circ$  с поверхностью шара. Отсюда получаем ответ: искомый угол равен  $45^\circ$  и картина силовых линий имеет вид







В т. О напряженность поля равна нулю, как и ее тангенциальная составляющая, поэтому граничное условие  $E_t=0$  выполняется, несмотря на неперпендикулярность силовых линий.

### Более общий случай

Покажем, что это решение является частным случаем более общей ситуации. Особыми точками поля (не только электрического) называются точки, в которых его напряженность обращается в нуль. В общем случае вблизи произвольной точки потенциал поля можно разложить в ряд:

$$\varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^3 E_i x_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 W_{ik} x_i x_k + \dots$$

где  $\varphi_0$  – потенциал в данной точке, а  $x_i=(x, y, z)$  – произвольные декартовы координаты с началом в данной точке. Индексы  $i, k$  принимают значение 1, 2, 3 и нумеруют координаты.  $E_i$  – компоненты напряженности электрического поля. Вблизи особой точки они зануляются. Тензор (матрица)  $W$  является симметричным и поворотом координат его можно привести к диагональному виду  $W=\text{diag}(A,B,C)$ . При этом для потенциала вблизи особой точки поля получаем разложение

$$\varphi = \varphi_0 + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \dots$$

Уравнение Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  выполняется при  $A+B+C=0$ .

В особых точках поля начинаются или кончаются силовые линии.

Если на поверхности проводника (без скачков у направления нормали к этой поверхности) у нас есть области с положительными и отрицательными зарядами (заведомо будут у незаряженного проводника в поле), то разделяющая их кривая будет состоять из особых точек поля (тангенциальная составляющая вектора напряженности обращается в ноль из-за граничных условий, а нормальная – из-за того, что поверхностная плотность зарядов зануляется). При сдвиге вдоль этой кривой потенциал не меняется. Поэтому вдоль касательной к кривой будет лежать один из собственных векторов матрицы  $W$ , например лежащий вдоль оси  $z$ . Кроме того соответствующее собственное значение обращается в ноль  $C=0$ . Вместе с условием (85) это дает разложение

$$\varphi = \varphi_0 + A(x^2 - y^2) + \dots = \varphi_0 + A\zeta\xi + \dots \quad (\zeta, \xi) = x \pm y$$

Видно, что (86) отличается от (82) заменой координат  $(y, z)$  на  $(\zeta, \xi)$

и изменением константы, стоящей перед произведением этих координат. Поэтому имеем ту же картину эквипотенциальных поверхностей и силовых линий. Силовыми линиями вблизи такой особой точки будут все так же два семейства гипербол и две сепаратриссы  $(\zeta = \pm\xi)$

, выходящие из особой точки и наклоненные под углом  $45^\circ$  к поверхности проводника. Так что заветный угол в  $45^\circ$  будет и в картине силовых линий в общем случае особых точек на поверхности, не имеющей углов и выступающих ребер.

# Ємність

Якщо ми маємо один провідник, то згідно з принципом суперпозиції при збільшенні його заряду в  $N$  разів у  $N$  разів збільшиться напруженість його електростатичного поля та різниця потенціалів у кожній точці. Вибираючи нуль потенціалу у нескінченно віддаленій точці отримуємо, що потенціал провідника  $\phi$  має бути пропорційним до заряду  $q$ .  $q=C\phi$ . Величина  $C$  є ємністю провідника. У системі СІ вона вимірюється у фарадах  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл} / 1 \text{ В}$ , у системі СГС у сантиметрах.  $1 \text{ Ф} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$ . Енергія поля або робота, що треба виконати для перенесення зарядів з нескінченності на провідник є

$$W = \int_0^q \phi(q) dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\phi^2}{2}$$

Якщо провідників декілька, на  $i$ -му провіднику заряд  $q_i$  та потенціал  $\phi_i$  відносно нескінченності, то ємність стає симетричною ( $C_{ik}=C_{ki}$ ) матрицею  $n \times n$ , де  $n$  – кількість провідників:

$$q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} \phi_k, \quad \phi_i = \sum_{k=1}^n C^{-1}_{ik} q_k, \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n C^{-1}_{ik} q_i q_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n C_{ik} \phi_i \phi_k$$

Для металевій кульки радіуса  $r$  маємо  $\phi=kq/r$ , тобто  $C=r/k$ .

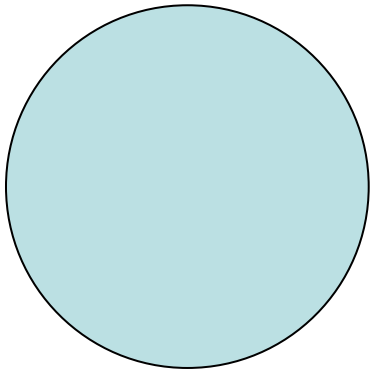
Діагональні елементи мають бути додатні  $C_{ii} > 0$ ,  $C^{-1}_{ii} > 0$ . Недіагональні елементи зветься коефіцієнтами електростатичної індукції. Має бути  $C_{ik} < 0$ ,  $C^{-1}_{ik} > 0$ .

Теорема Томсона: заряди розподілені у провідниках таким чином, що енергія поля мінімальна. Наслідок: нейтральний провідник притягується до місць, де поле посилюється.

Є також аналог теореми Ерншоу для провідників: вони не можуть бути у стані стійкої рівноваги там, де відсутні вільні заряди.

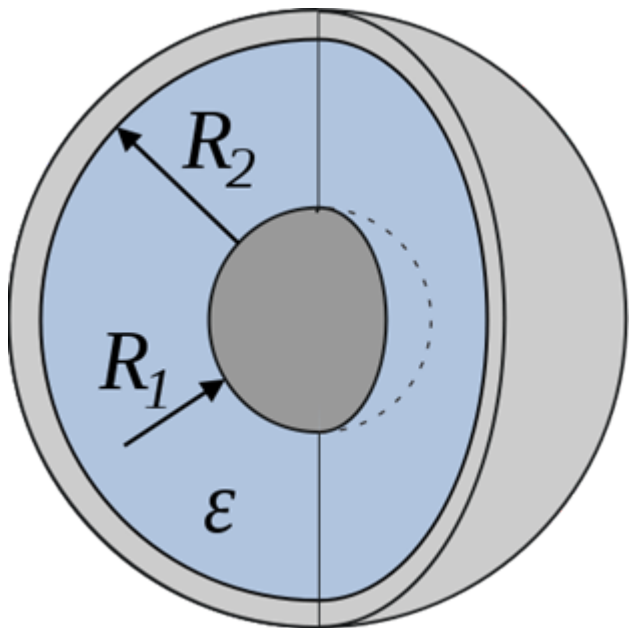
## Приклади

Для металевій кульки радіуса  $r$  маємо  $\varphi = kq/r$ , тобто  $C = r/k$ .



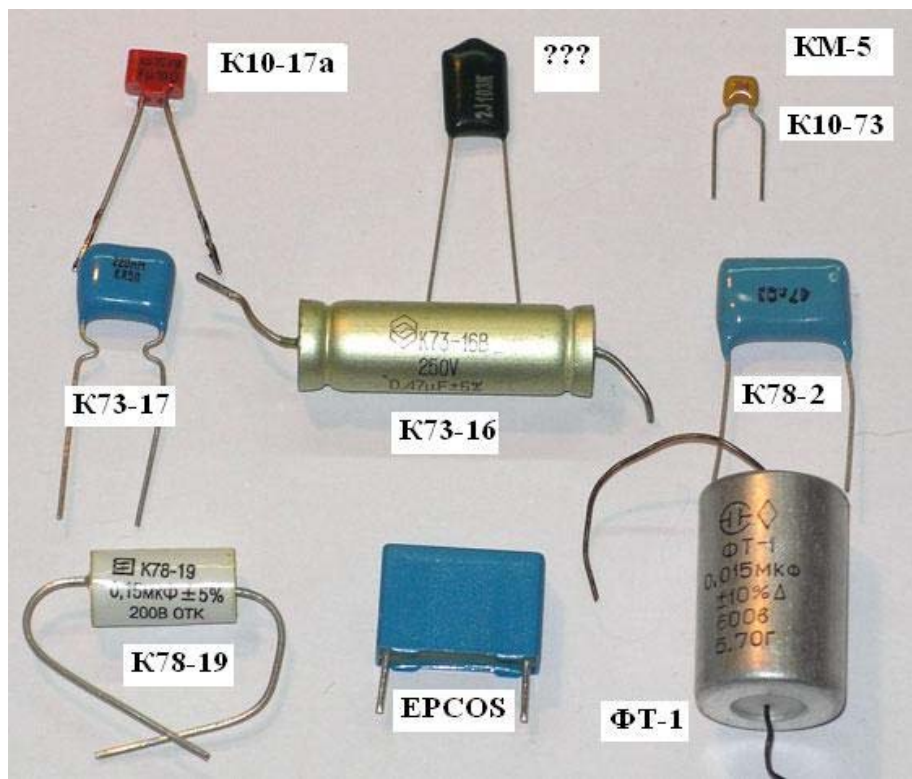
$$\varphi = \frac{kq}{r} \Rightarrow C = \frac{q}{\varphi} = \frac{r}{k}$$

В системі СГС  $C = r$

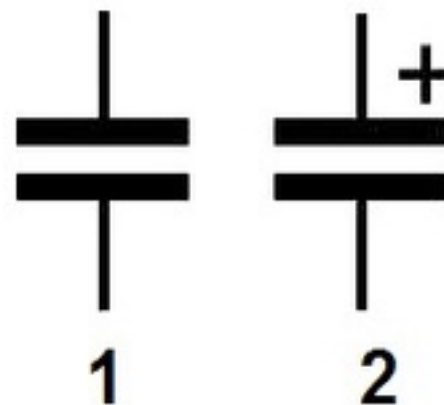


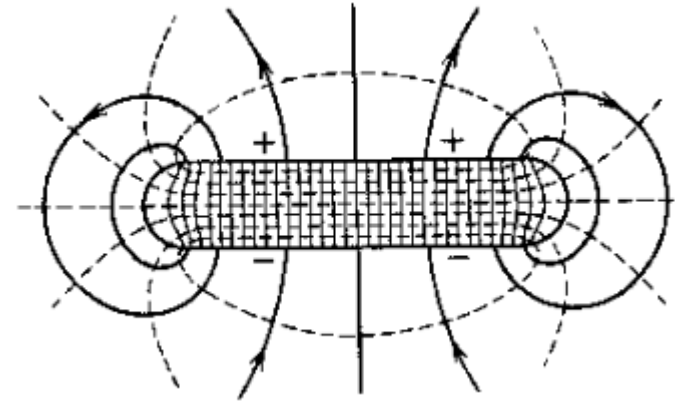
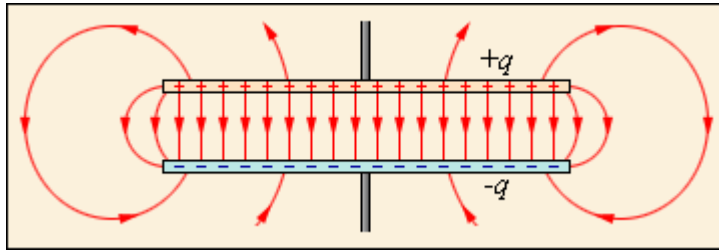
$$\varphi_1 = \frac{kq_1}{R_1} + \frac{kq_2}{R_2}, \quad \varphi_2 = \frac{kq_1}{R_2} + \frac{kq_2}{R_2}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = k \begin{pmatrix} R_1^{-1} & R_2^{-1} \\ R_2^{-1} & R_2^{-1} \end{pmatrix}$$



## Конденсатори

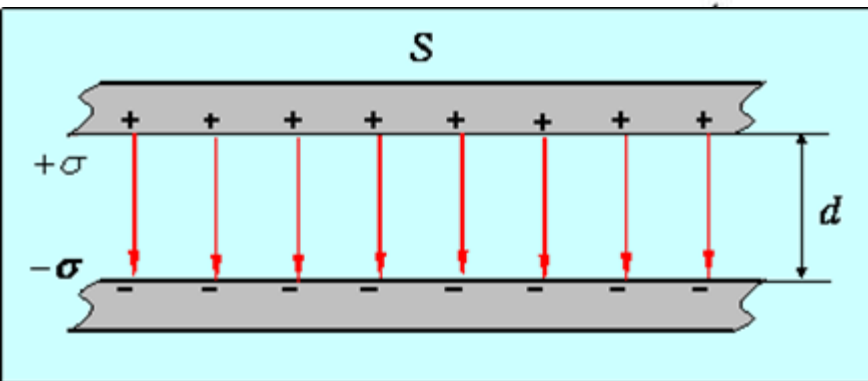




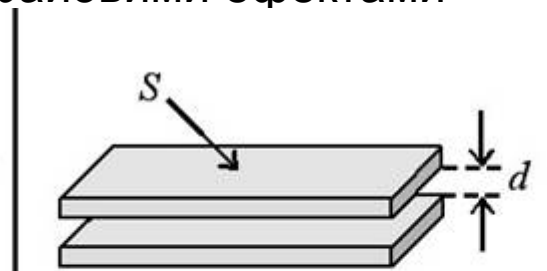
Заряди на обкладинках  $q$  та  $-q$ , різниця потенціалів  $U$ , взаємна ємність  $C$ .  $Q=CU$

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

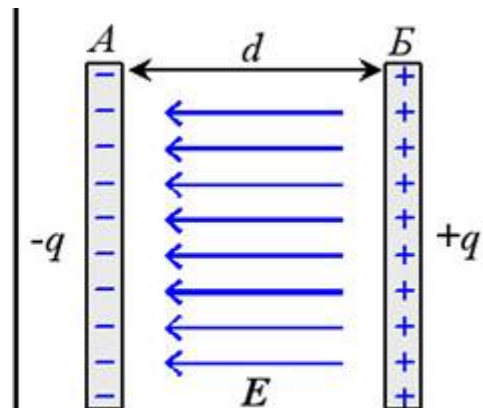
Взаємна ємність теж вимірюється в фарадах та сантиметрах. Знайдемо  $C$  для плоского конденсатора, нехтуючи крайовими ефектами



(a)

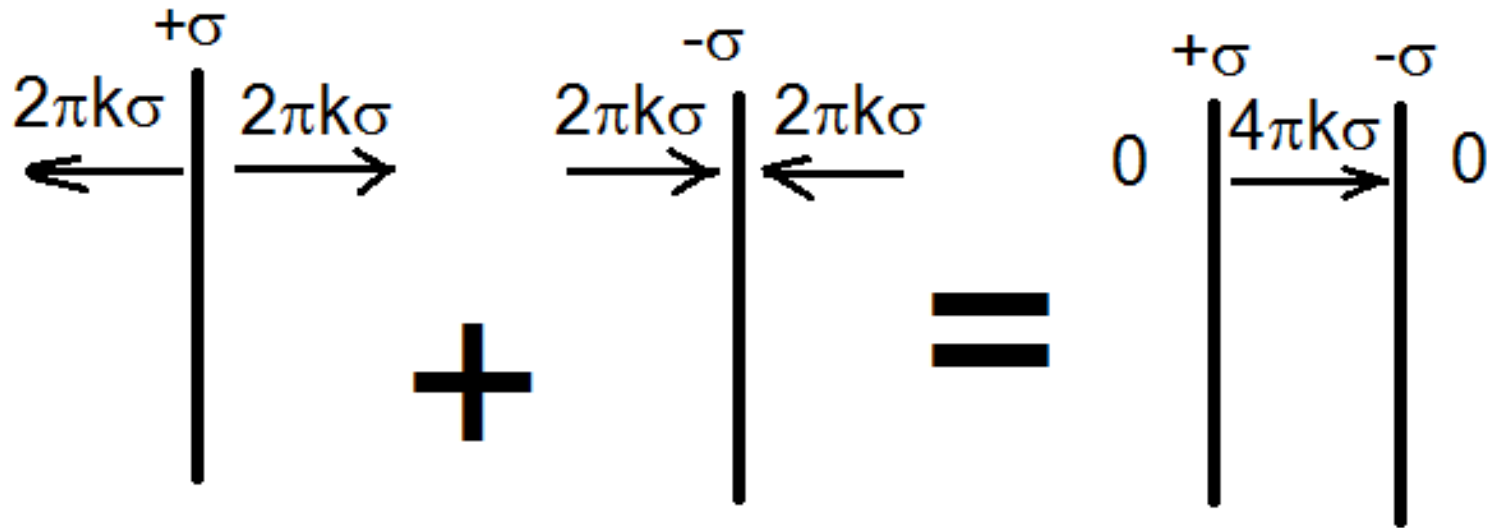


(b)



(c)



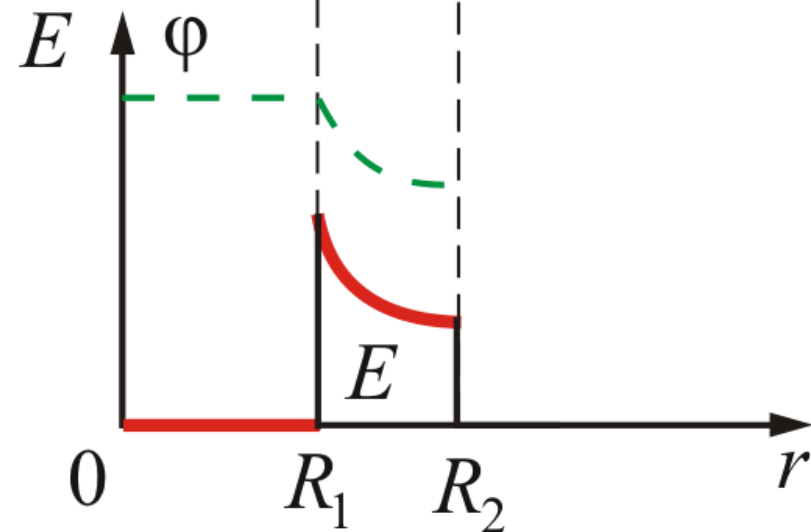
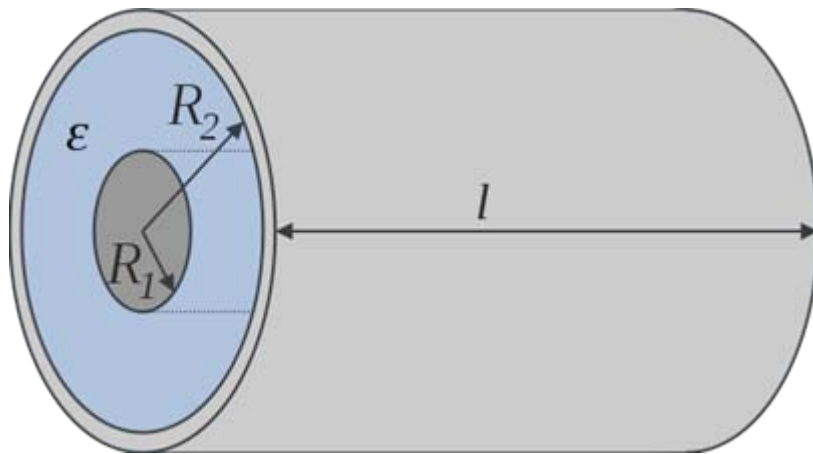
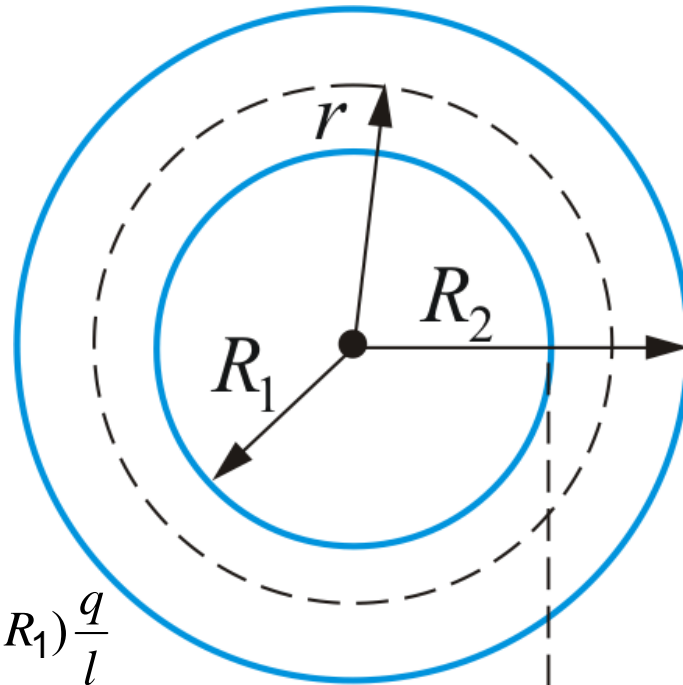


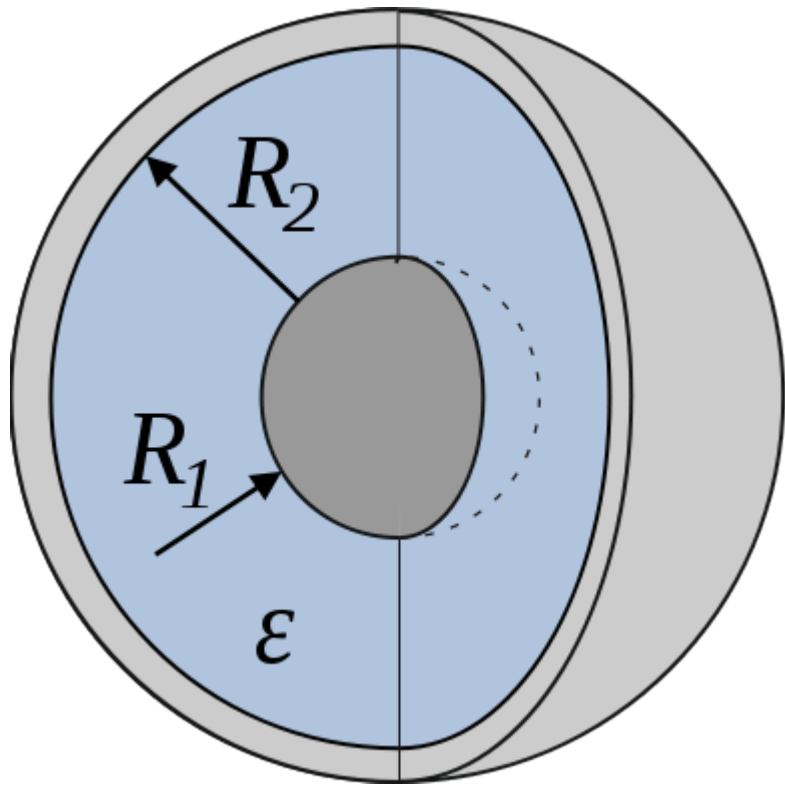
$$E = 4\pi k\sigma, U = \int_0^d \vec{E}d\vec{l} = Ed = 4\pi k\sigma d = 4\pi kd \frac{q}{S} \Rightarrow C = \frac{S}{4\pi kd}$$

# Сферичний та циліндричний конденсатори

$$C = \frac{l}{2k \ln(R_2 / R_1)}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} 2k\lambda \frac{dr}{r} = 2k\lambda \ln(R_2 / R_1) = 2k \ln(R_2 / R_1) \frac{q}{l}$$





$$C = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

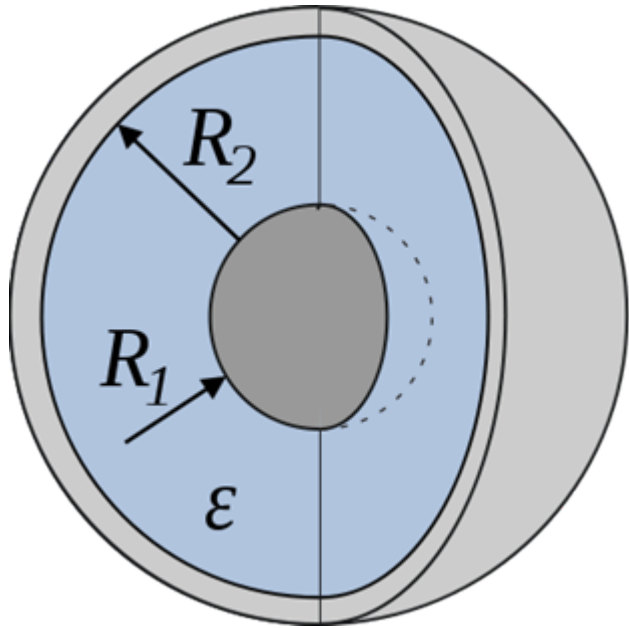
$$U = \int_{R_1}^{R_2} kq \frac{dr}{r^2} = kq(R_1^{-1} - R_2^{-1})$$

$$\varphi_1 = C_{11}^{-1}q_1 + C_{12}^{-1}q_2, \quad \varphi_2 = C_{21}^{-1}q_1 + C_{22}^{-1}q_2$$

$$q_1 = -q_2 = q \Rightarrow \varphi_1 = q(C_{11}^{-1} - C_{12}^{-1}), \quad \varphi_2 = q(C_{21}^{-1} - C_{22}^{-1})$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = q(C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1})$$

$$C^{-1} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1}$$



$$\varphi_1 = \frac{kq_1}{R_1} + \frac{kq_2}{R_2}, \quad \varphi_2 = \frac{kq_1}{R_2} + \frac{kq_2}{R_2}$$

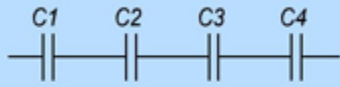
$$C^{-1} = k \begin{pmatrix} R_1^{-1} & R_2^{-1} \\ R_2^{-1} & R_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = k(R_1^{-1} - R_2^{-1})$$

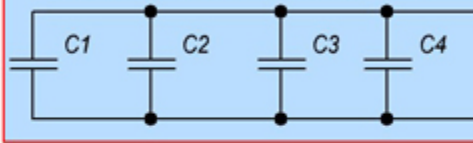
$$C = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

## Соединение конденсаторов

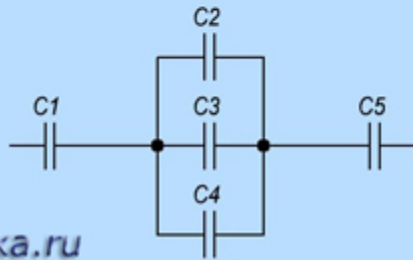
### Последовательное соединение



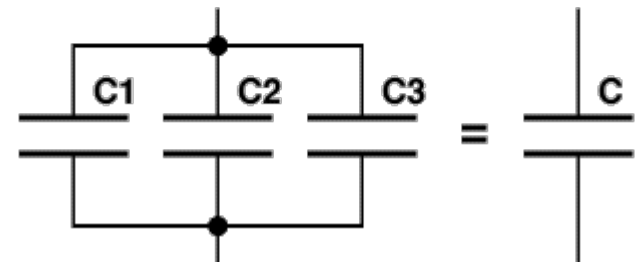
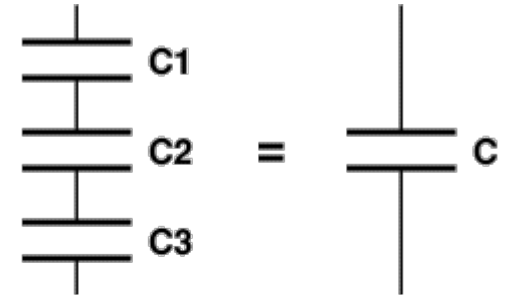
### Параллельное соединение



### Смешанное соединение



<http://sxemotehnika.ru>



$$q = \text{const}, U = \frac{q}{C} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \dots$$

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

$$U = \text{const}, q = CU = q_1 + q_2 + q_3 + \dots = qC_1 + qC_2 + qC_3 + \dots$$

$$C = \sum C_i$$

# Supercapacitors

## Double-layer Capacitors

Charge storage:  
Electrostatically (Helmholtz Layer)

Activated  
Carbons

Carbon  
Aerogels

Carbon Nanotubes (CNT),  
Graphene, Carbid-derived carbon (CDC)

## Pseudocapacitors

Charge storage:  
Electrochemically (Faradaic charge transfer)

Conducting  
Polymers

Metall Oxides

## Hybrid Capacitors

Asymmetric electrodes  
Charge storage: Electrostatically and Electrochemically

Asymmetric  
Pseudo/EDLC

Composite

Rechargeable  
batterie-type



# Supercapacitor Суперконденсатор

<b>Manufacturer</b>	<b>Series name</b>	<b>Capacitance range (F)</b>	<b>Cell voltage (V)</b>	<b>Volumetric energy density (Wh/dm<sup>3</sup>)</b>	<b>Gravimetric energy density (Wh/kg)</b>	<b>Remarks</b>
APowerCap	APowerCap	4...550	2.7	–	≤4.5	–
AVX	BestCap®	0.05...0.56	3.6	≤0.13	–	Modules up to 20 V
Cap-XX	Cap-XX	0.17...2.4	2.5	≤2.2	-	–
CDE	Ultracapacitor	0.1...1.0	3.6	-	-	–
Cooper	PowerStor	0.22...3000	2.5/2.7	–	–	Modules up to 62 V
Elna	DYNACAP POWERCAP	0.047...1500	2.5/3.6	-	–	–

Енергія поля та її густина

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \sum_{i=1} q_i\varphi_i \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int \sigma\varphi dS$$

Застосуємо теорему Гріна

$$\oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV$$

якщо  $\psi = \varphi$  та отримаємо

$$\oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \oint_S \varphi E_n dS = 4\pi \oint_S \varphi \sigma dS$$

$$\int_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV = \int_V (\varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2) dV = \int_V (-\varphi 4\pi k \rho + E^2) dV$$

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dS = \frac{1}{8\pi k} \int_V E^2 dV$$

Це відповідає густині енергії поля

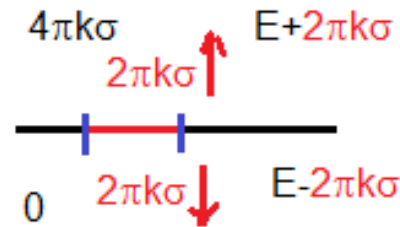
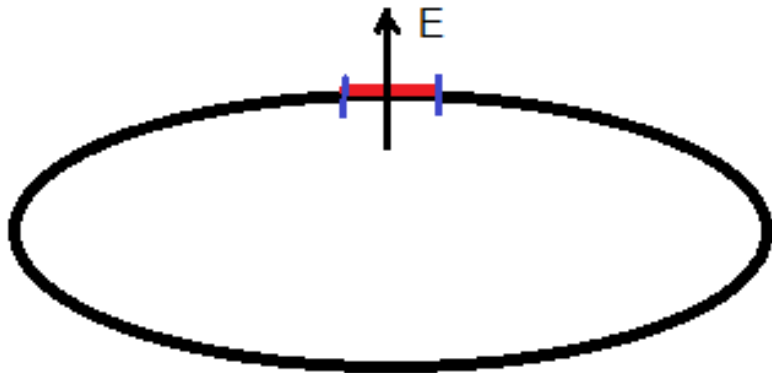
$$w = \frac{E^2}{8\pi k}, \quad W = \int_V w dV$$

Виведення ємності плоского конденсатора через енергію поля

$$W = \frac{q^2}{2C} = wV = \frac{E^2}{8\pi k} Sd = \frac{(4\pi k\sigma)^2}{8\pi k} Sd = \frac{2\pi kq^2}{S^2} Sd = \frac{2\pi kdq^2}{S}$$

$$C = \frac{S}{4\pi kd}$$

**Пондеромоторна сила** — сила, що діє на фізичне тіло, зокрема на діелектрик, в електричному полі.



$E_n$

0

$$E = 2\pi k\sigma, F = qE = S\sigma \times 2\pi k\sigma, P = F / S = 2\pi k\sigma^2 = \frac{E^2}{8\pi k}$$

$$C = r \quad W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2r}$$

$$m_e c^2 = \frac{e^2}{r_e} \Rightarrow r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 10^{-13} \text{ cm}$$

Перенормування

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2(\vec{E}_1 \vec{E}_2)$$

$$W = W_1 + W_2 + \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E}_1 \vec{E}_2) dV$$