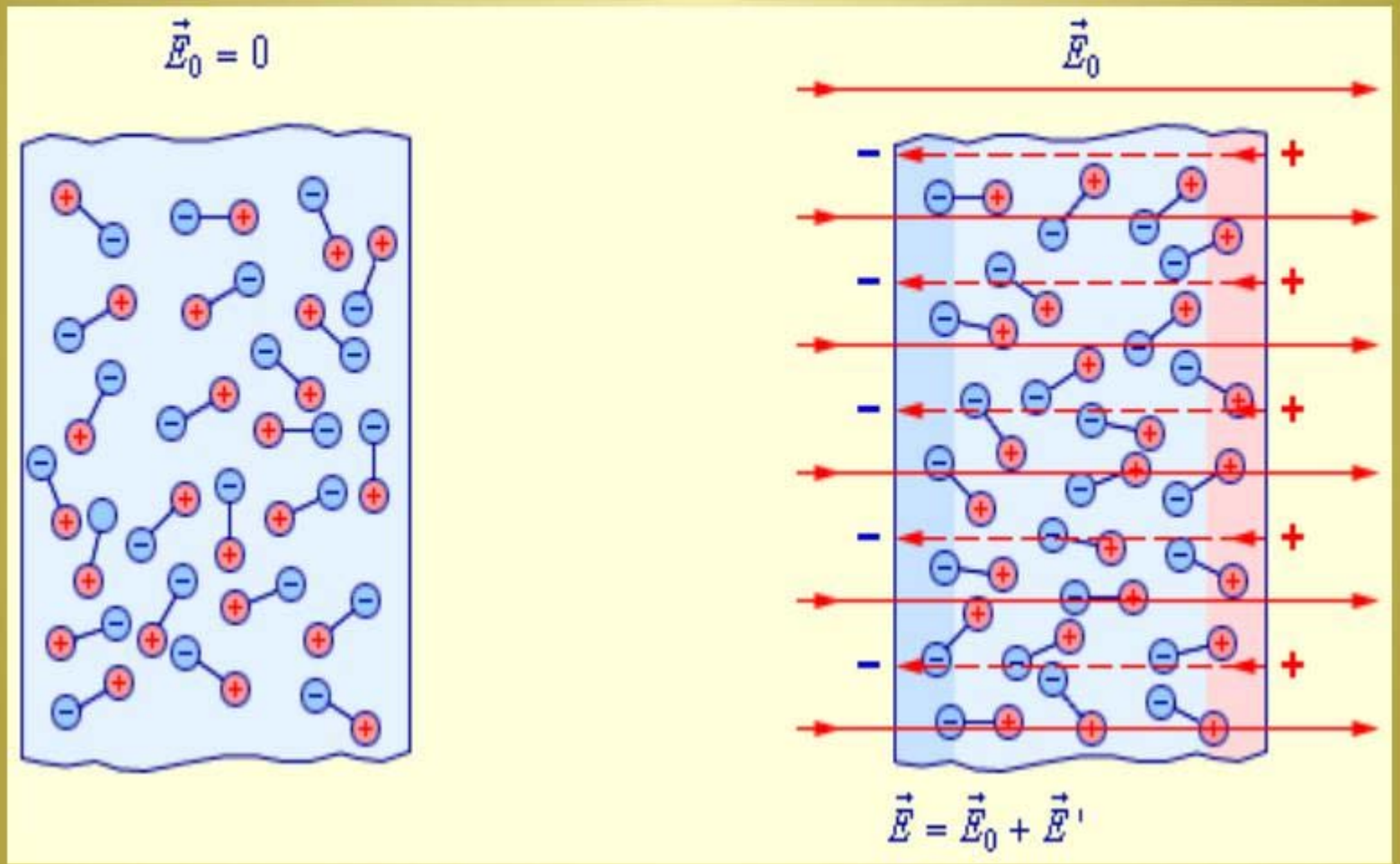
Електрика та магнетизм

Лекція 6

Електростатика діелектриків

Диэлектрики в электрическом поле



$$div\vec{E} = 4\pi\rho_{tot} = 4\pi(\rho_{вільн} + \rho_{індуц})$$

$$\rho_{індуц} = -div\vec{P},\ \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$div\vec{D} = 4\pi\rho_{вільн} = 4\pi\rho$$

$\vec{P}$ - об'ємна густина дипольного моменту діелектрика або поляризовність, поляризуемость (рос.), polarization density (or electric polarization, or simply polarization).

$\vec{D}$ - електрична індукція, electric displacement field. Кл/м^2

ε – діелектрична проникливість, диэлектрическая проницаемость, permittivity

α - діелектрична сприйнятливість, диэлектрическая восприимчивость, electric susceptibility

Електрична індукція та поляризовність.

Величина	СГС	СІ
$\oint_S \vec{D} d\vec{S} =$	$4\pi q$	q
div D=	$4\pi\rho$	ρ
D=	$E+4\pi P$	$\varepsilon_0 E+P$
Для багатьох речовин		
P=	αE	$\alpha\varepsilon_0 E$
D=	εE	$\varepsilon\varepsilon_0 E$
ε=	$1+4\pi\alpha$	$1+\alpha$
$\alpha_{СІ}=4\pi\alpha_{СГС}$		
w=	$\varepsilon E^2/8\pi$	$\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{Кл^2}{Нм^2}$$

Gaussian units	SI units
$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$
$\mathbf{P} = \chi_\mathrm{e}\mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\mathbf{E}$
$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$
$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{e}$	$\epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_\mathrm{e}$

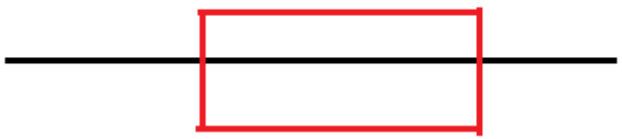
where

E and D are the electric field and displacement field, respectively;
P is the polarization density;
ϵ is the permittivity;
ϵ_0 is the permittivity of vacuum (used in the SI system, but meaningless in Gaussian units);
χ_e is the electric susceptibility

Поверхнева густина заряду

$$\sigma = P_n$$

Граничні умови. З $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ та контуром



маємо $E_{t1} = E_{t2}$

Рівняння Максвела дає умову

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q \Rightarrow D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\sigma$$

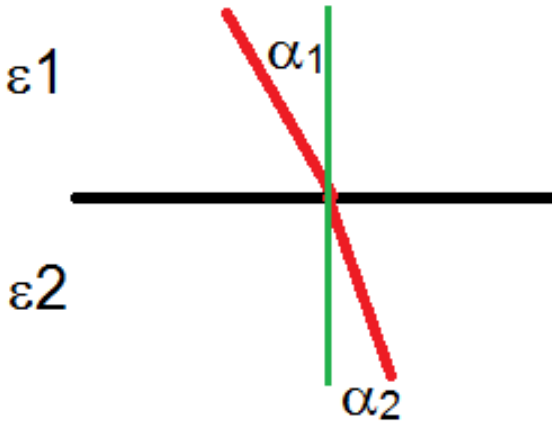
Якщо на поверхні немає вільних зарядів, то граничні умови приймають вигляд

$$\overline{E}_{t2} = \overline{E}_{t1},$$

$$D_{n2} = D_{n1},$$

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}$$

Заломлення силових пінiй електричного поля на границі



$$D_{n1} = \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 =$$

$$= D_{n2} = \varepsilon_2 E_{n2} = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2$$

$$E_{t1} = E_1 \sin\alpha_1 = E_{t2} = E_2 \sin\alpha_2$$

$$\frac{\varepsilon_1 \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}$$

Яке рівняння розв'язувати?

$$div\vec{D} = 4\pi\rho, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{E} = -grad\,\varphi$$

$$div\left(\varepsilon\, grad\,\varphi\right) = -4\pi\rho\ (СГС)$$

Якщо у Всесвіті крім провідників є середовище з проникливістю ε маємо

$$\boxed{\varepsilon\,\Delta\varphi = -4\pi\rho\ (СГС)}$$

Ємність збільшується у ε разів.

Ємність конденсаторів теж збільшується приблизно у ε разів.

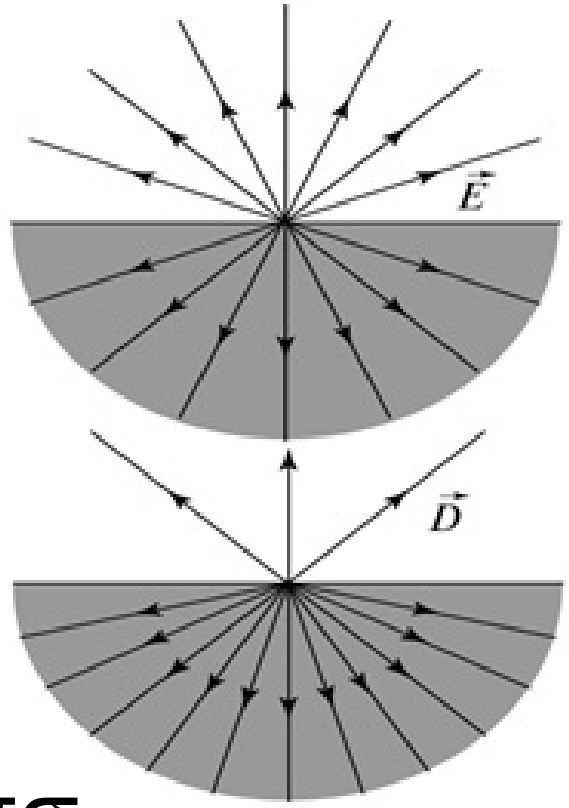
$$\vec{E} = k\frac{Q}{\varepsilon r^3}\vec{r}$$

Узагальнений закон Кулона для діелектриків

Границя двох середовищ

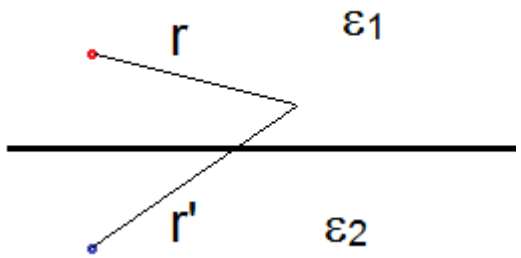
Точковий заряд на границі двох середовищ з ε_1 та ε_2. Вважаємо, що $E=A/r^2$. В першому $D_1= \varepsilon_1 A/r^2$, в другому $D_2= \varepsilon_2 A/r^2$, кожне має по 2π стерадіанів. З рівняння Максвела маємо $q=2\pi A(\varepsilon_1+\varepsilon_2)A$, звідкіля знаходимо A.

$$E_{t1} = E_{t2}$$



$$D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\sigma$$

Аналог метода дзеркальних відображень



$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r} + \frac{q'}{\varepsilon_1 r'},\ \varphi_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r}$$

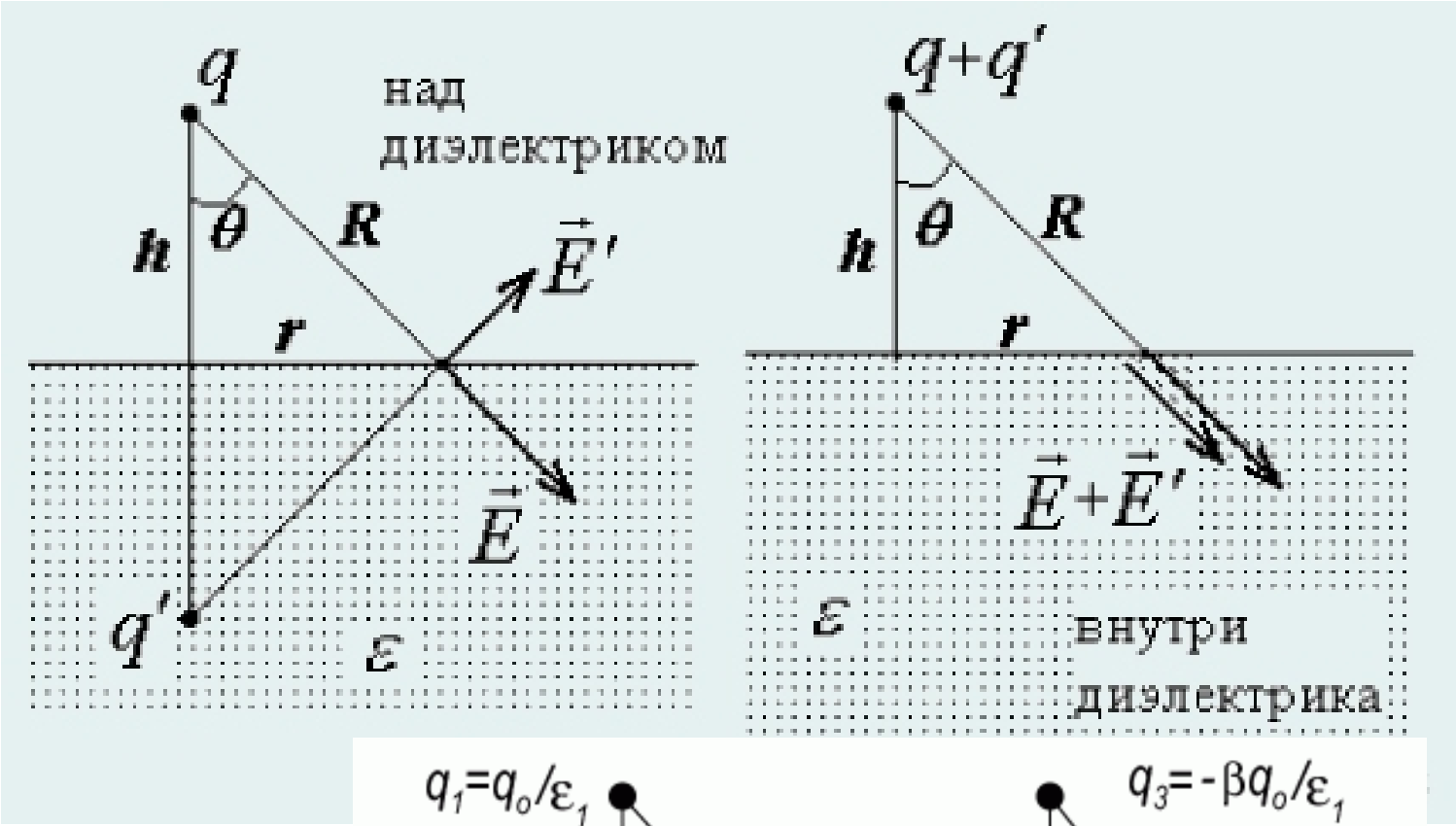
умови на кордоні

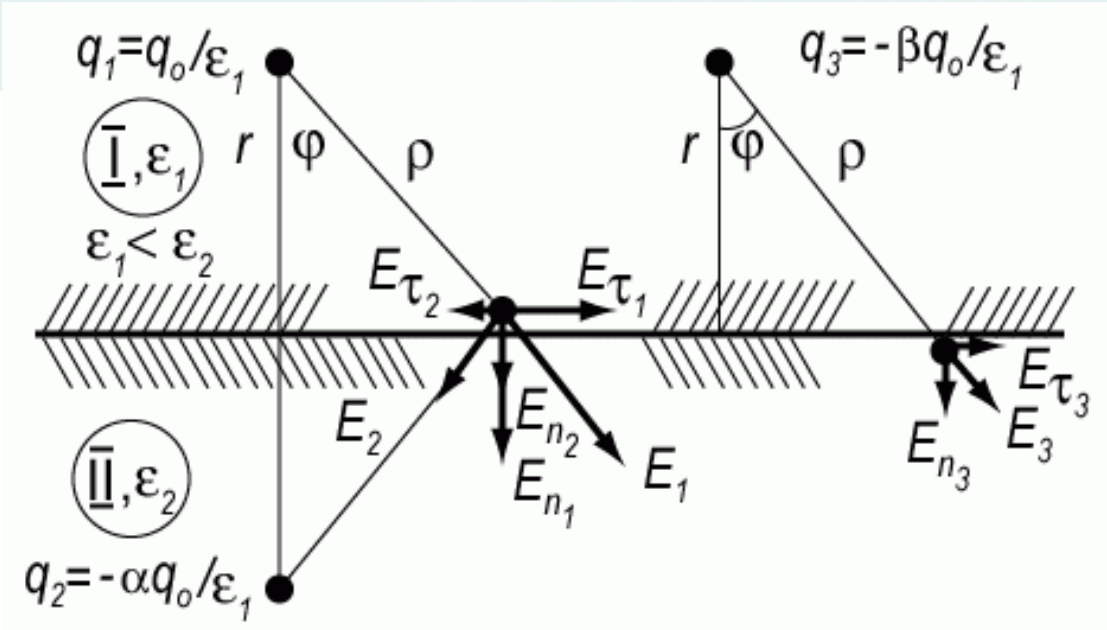
$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow q + q' = q''\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Rightarrow q - q' = q''$$

$$q' = q\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},\ q'' = q\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Перевірка. При $\varepsilon_2 \to \infty$ це має перейти у випадок, коді друге середовище це провідник. Дійсно, тоді q'→ -q, а q" не вносить внеску через $\varepsilon_2 \to \infty$.


q
над
диэлектриком
h
θ
R
r
E'
E
q'
ε
q+q'
h
θ
R
r
E+E'
ε
внутри
диэлектрика


q1=qo/ε1
q3=-βqo/ε1
I,ε1
r
φ
ρ
r
φ
ρ
ε1< ε2
Eτ2
Eτ1
Eτ3
E2
En2
En1
E1
En3
E3
II,ε2
q2=-αqo/ε1

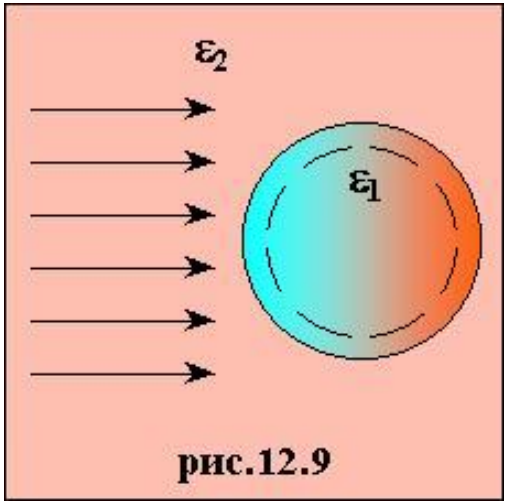
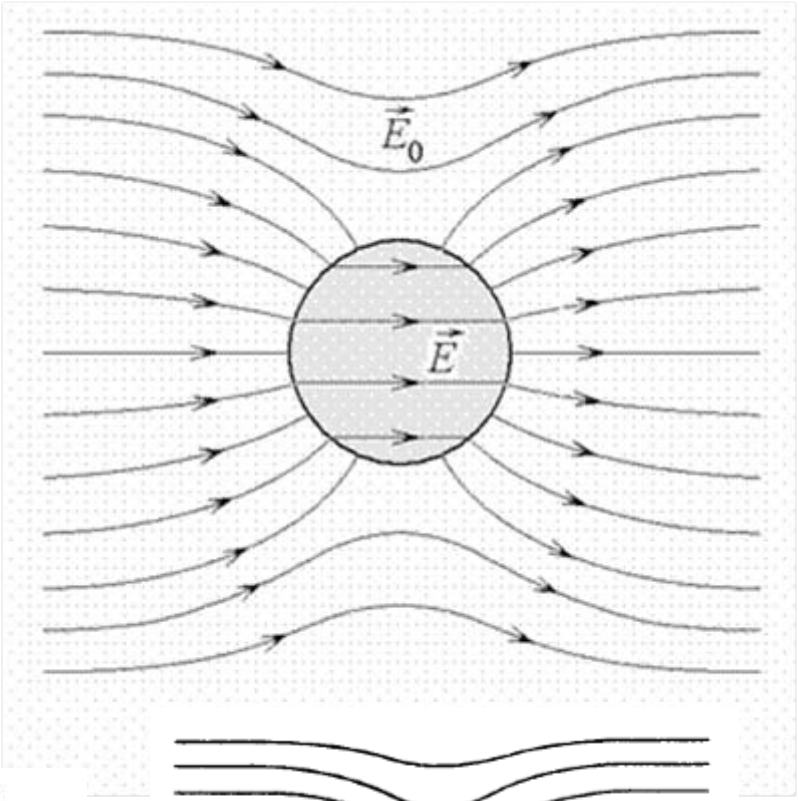
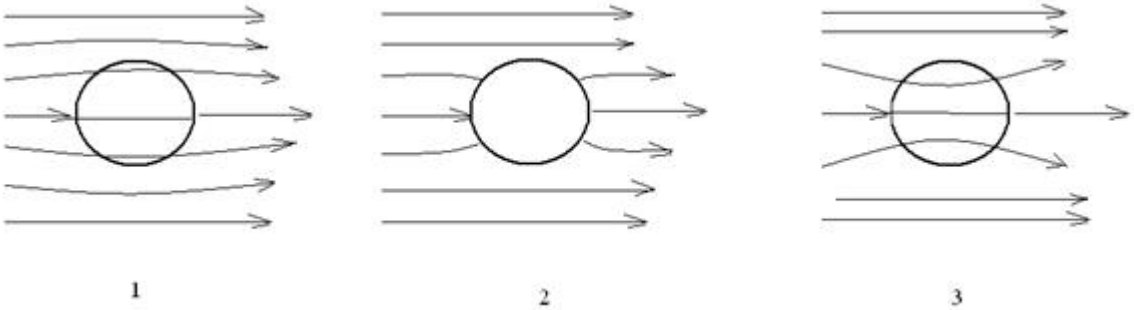
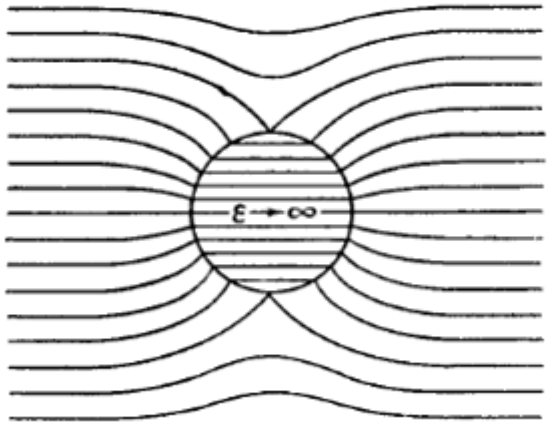
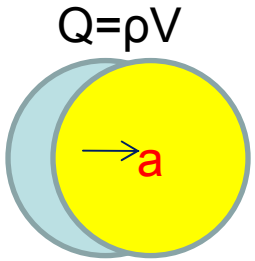


рис.12.9









$$\vec{P} = \rho\vec{a},\ \ \varphi(r) = \frac{q(r)(\vec{a}\vec{r})}{r^3},\ q(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}R^3\rho & r > R \\ \frac{4\pi}{3}r^3\rho & r < R \end{cases}$$

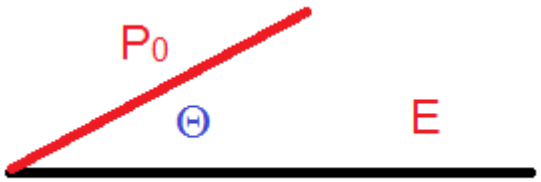
$$r < R \Rightarrow \varphi(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho\frac{(\vec{a}\vec{r})}{r^3} = \frac{4\pi}{3}\rho(\vec{a}\vec{r}) = \frac{4\pi}{3}(\vec{\mathrm{P}}\vec{\mathrm{r}})$$

$$\vec{E} = -\frac{4\pi}{3}\vec{P}$$

Діелектрики як ведмеді, є полярні та неполярні.

Електрети — аморфні речовини, здатні впродовж тривалого часу втримувати наведену поляризацію. Складаються з полярних молекул, наприклад, суміші воску й смоли. Якщо розплавити таку суміш і помістити її в дуже сильне електричне поле, а потім дати затверднути в такому стані, поляризація зберігатиметься протягом днів. Проте з часом повільні процеси релаксації призведуть до хаотизації орієнтації полярних молекул, і електричний момент поволі зникне.

Неполярні: p=βE, P=Np $\varepsilon - 1 = 4\pi N\beta$



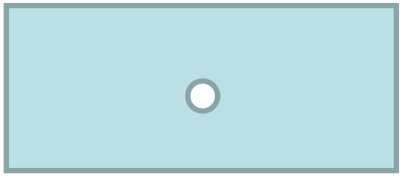
Полярні з дипольним моментом молекули p_0

$$U = -p_0 E\cos\theta,\ \ dN = C\exp(a\cos\theta)\sin\theta d\theta,\ a = \frac{p_0 E}{kT},\ \ C = const$$

$$dN \approx C(1 + a\cos\theta)\sin\theta d\theta,\ \ N_0 = \int_0^\pi C(1 + a\cos\theta)\sin\theta d\theta = 2C,\ C = \frac{N_0}{2}$$

$$p = \int_0^\pi p_0\cos\theta dN = \frac{N_0 p_0}{2}\int_0^\pi \cos\theta(1 + a\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{N_0 p_0 a}{3} = \frac{N_0 {p_0}^2}{3kT}E$$

$$\varepsilon - 1 = 4\pi N\left(\beta + \frac{{p_0}^2}{3kT}\right)$$



Мікроскопічна електродинаміка

Діелектрична проникливість
P=Np=Nβ E, ε=1+4πβN, α=Nβ
Ефективне поле P=αE’
E’=E-(-4π/3)P= E+4πP/3

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}' = \alpha\left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}\right)$$

ε= 1+4πα

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\left(\beta + \frac{{p_0}^2}{3kT}\right) = \frac{4\pi}{3} N\alpha$$

Рівняння Лоренца-Лорентца

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\left(\beta + \frac{{p_0}^2}{3kT}\right)$$

Анізотропне середовище, наприклад кристали

$$D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$D_x = \varepsilon_0 (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z)$$

$$D_y = \varepsilon_0 (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z)$$

$$D_z = \varepsilon_0 (\varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z)$$

СІ

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

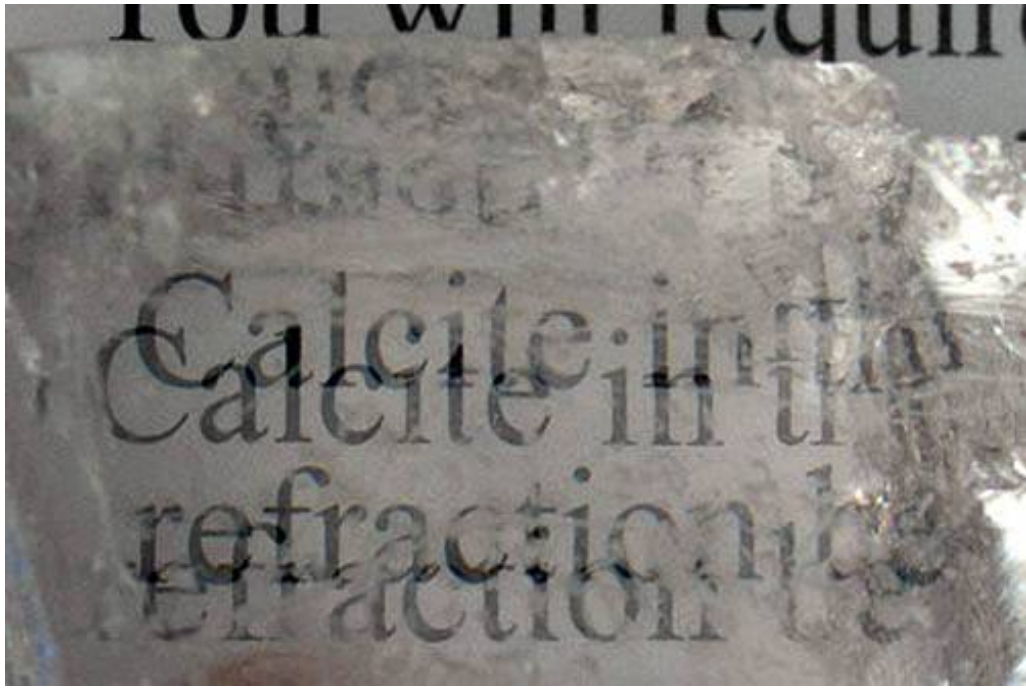
Після повороту осей

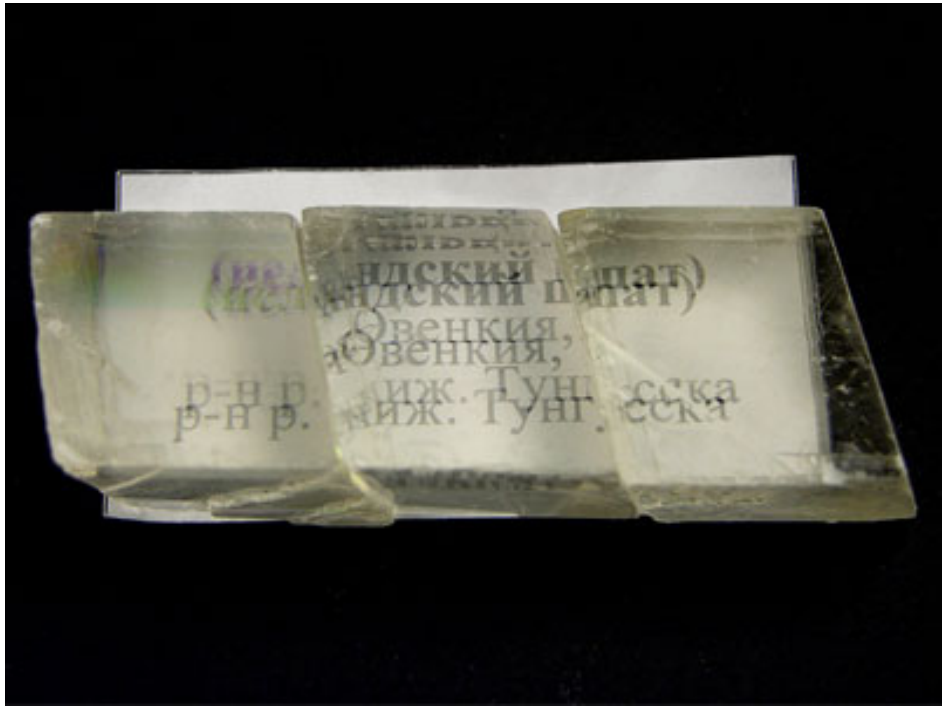
Кристали кубічні, одновісні та двовісні

Кристаллическая система	Диэлектрические оси	Эллипсоид волновых нормалей	Оптическая классификация кристалла
Триклинная	*CCC*	Произвольный эллипсоид	Двухосный
Моноклинная	*CCF*	То же	»
Ромбическая	*FFF*	» »	»
Тригональная Тетрагональная Гексагональная	*FRR*	Сфероид	Одноосный
Кубическая	*RRR*	Сфера	Изотропный

$$\left(\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \right)$$

Канцелярские
КНОПКИ
100 шт. / уп.
pins
Михаил Лейкум


Calcite in the
refraction



$$\varepsilon_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi q \delta(\vec{r})$$

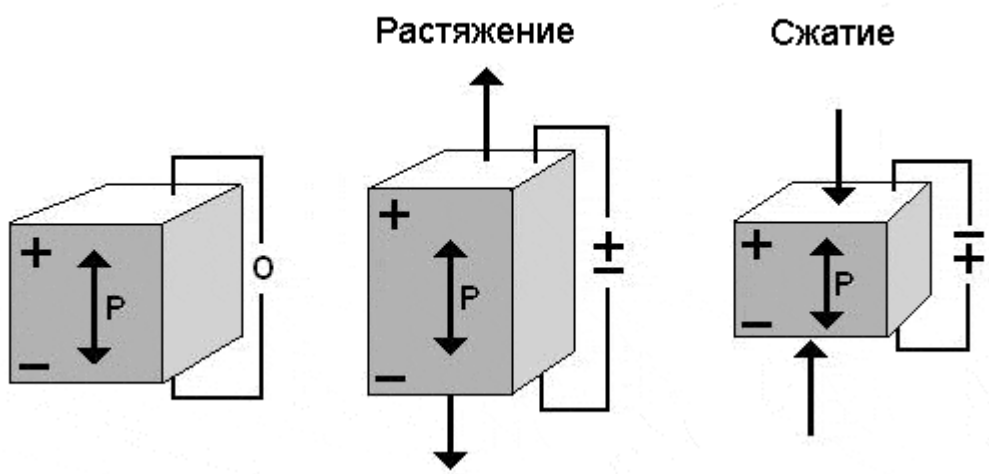
$$x = x'\sqrt{\varepsilon_x},\ y = y'\sqrt{\varepsilon_y},\ z = z'\sqrt{\varepsilon_z},$$

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}} \left(\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} \right)^{-1/2} \propto r'^{-1}$$

Електрети
Кристали та інші анізотропні середовища
П’єзоелектрики, зворотній ефект
Піроелектрики
Сегнетоелектрики та антісегнетоелектрики

$$D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k$$

П'єзоефект — виникнення електричних зарядів (п’єзоелектрики) на гранях деяких кристалів при їхній деформації (прямий п'єзоефект), або навпаки — виникнення деформації цих кристалів внаслідок дії електричного поля (зворотний п'єзоефект).



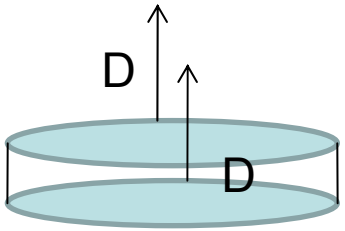
Пироэлектрики -

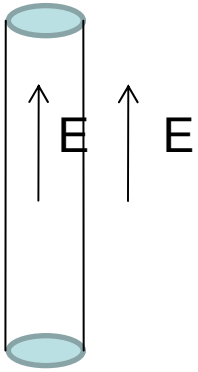
кристаллы, в которых изменение спонтанной Поляризация происходит при изменении температуры. Типичный пироэлектрик - турмалин. В нем при изменении температуры на один градус возникает электрическое поле пироэлектрики - приемник и индикаторы излучений.

Турмалин

Вимірювання E та D у діелектриках

$$D_i = D^{(0)}{}_i + \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k$$

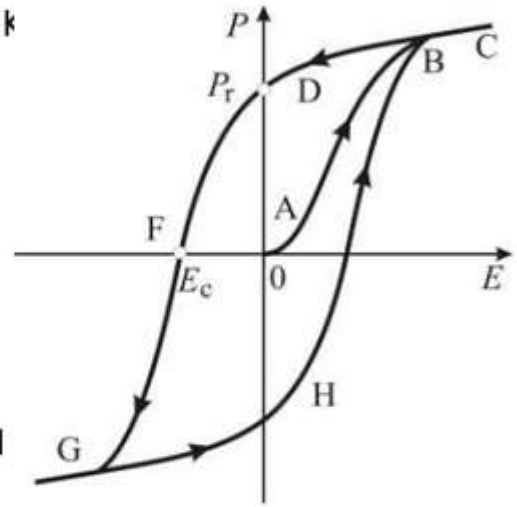




Сегнетоелектрики та антісегнетоелектрики

10. Сегнетоэлектрики

- Сегнетоэлектрики обладают спонтанной поляризацией до определенной температуры T_C, нелинейной зависимостью поляризации от напряженности электрического поля и способностью к переполяризации.
- Сегнетоэлектрики получили свое название от сегнетоэлектрической соли $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ – минерала, для которого впервые наблюдалась нелинейность зависимости $P(T)$.
- Характерной особенностью сегнетоэлектриков является наличие **петли гистерезиса** на зависимости $P(T)$.
- Существование **сегнетоэлектрического гистерезиса** связано с наличием **сегнетоэлектрических доменов** – объемных областей, в каждой из которых дипольные моменты ориентированы одинаково.



Явление сегнетоэлектричества аналогично явлению ферромагнетизма и в англоязычной литературе носит название ферроэлектричества (англ. ferroelectricity).